CONCOURS BLANC 2023

ECG1 Mathématiques Approfondies

Durée : 4 Heures

Le sujet comporte 4 pages

Les 2 exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation des copies.

Le candidat veillera à encadrer les résultats des différentes questions.

Les calculatrices et les documents sont interdits.

Exercice 1

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $\forall x \neq -2, f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

- Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Chercher les points fixes de la fonction f .

2) On considère 2 suites $(p_n)_{n \geq 0}$ et $(q_n)_{n \geq 0}$ définies par $\begin{cases} p_0 = 3 \\ q_0 = 5 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A.X_n$

On définit les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Calculer la matrice J^2 .

c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = I + \frac{3^n - 1}{2} J$.

d) En déduire le terme général des suites $(p_n)_{n \geq 0}$ et $(q_n)_{n \geq 0}$.

3) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0,6$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{p_n}{q_n}$.

b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ quand n tend vers $+\infty$?

c) En utilisant la question 2), montrer que : $u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

d) Ecrire un programme Python qui calcule le plus petit entier n tel que $|u_n - 1| \leq 10^{-10}$.

Exercice 2

Partie A

Soit f la fonction définie sur $] -\infty, 1[$ par $\forall x < 1, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f .

b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ainsi que la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.

2) Justifier que la fonction f est de classe C^∞ sur $] -\infty, 1[$ et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in] -\infty, 1[, f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} (1-x)^{-n-\frac{1}{2}}$$

3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in] -\infty, 1[, f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt$

4a) Soit $x \in]0, 1[$. Vérifier que la fonction $t \mapsto \frac{x-t}{1-t}$ est monotone sur $[0, x]$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \leq 2x^n \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)$

c) On admet la formule de Stirling: $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. Vérifier que $\frac{n+1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$

d) En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

Partie B

Soit $p \in]0, 1[$. On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 0}$ mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(Y_n = 1) = p$ et $P(Y_n = -1) = 1-p$

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n = \frac{1+Y_n}{2}$. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Z_n .

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi la variable aléatoire $\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$ suit la loi binomiale $B(n, p)$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k$ et on note $p_n = P(X_n = 0)$.

a) Ecrire une fonction Python **marche(n,p)** qui prend en argument un couple $(n, p) \in \mathbb{N} \times]0, 1[$ et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X_n .

b) En utilisant la question 1)b), montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, p_{2n+1} = 0$ et $p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$

3) On suppose dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$.

Vérifier que $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} p_{2n}$ converge et préciser la somme de cette série.

4) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.

Montrer que $p_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et donner la nature de la série $\sum_{n \geq 0} p_{2n}$.

Problème

Partie A

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

$$\varphi: E \rightarrow E$$

1) On définit l'application

$$P \mapsto \varphi(P) = X.P + \frac{1}{n}X(1-X)P'$$

a) Vérifier que φ est une application linéaire.

b) Calculer $\varphi(X^n)$.

c) Justifier que φ est un endomorphisme de E .

2) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit le polynôme $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Justifier que $B = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre.

Indice: On pourra évaluer tous ces polynômes en un réel bien choisi.

b) En déduire que c'est une base de E .

c) Vérifier que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi(P_k) = \frac{k}{n}P_k$ et écrire la matrice de l'application φ dans la base B .

d) L'application φ est-elle bijective ?

e) Donner une base du noyau et de l'image de l'application φ . Sont-ils supplémentaires ?

Partie B

On dispose d'un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n .

On effectue dans ce sac une succession de tirages en remettant à chaque fois dans le sac le jeton tiré.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle :

T_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{\text{ème}}$ numéro tiré est un numéro qui n'a pas encore été tiré et qui vaut 0 sinon.

1) a) Recopier et compléter les lignes 5,6,7 et 10 du programme Python ci-contre pour qu'il simule une réalisation de la variable aléatoire T_k .

b) Expliquer précisément l'utilité et le fonctionnement des lignes 8 et 9.

2) Expliquer pourquoi $T_k = \sum_{i=1}^k Z_i$.

3) a) Reconnaître les lois de Z_1 et de Z_2 et en déduire la loi de T_2 .

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(T_k = 1)$ et vérifier que $P(T_k = k) = \frac{n!}{(n-k)! n^k}$. En déduire la loi de T_3 .

4) a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Combien vaut $P_{T_k=j}(Z_{k+1} = 1)$?

b) En déduire que : $P(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}E(T_k)$

c) En déduire que : $E(T_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)E(T_k) + 1$

```
1 import numpy.random as rd
2 import numpy as np
3 n=int(input("Nombre de boules ? "))
4 k=int(input("Nombre de tirages ? "))
5 L=
6 for i in
7     num=
8     if L[num]==0:
9         print("Z_",i+1,"=1")
10    L[num]=
11 T=np.sum(L)
12 print("T_k vaut: ",T)
```

5)a) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $E(T_k) = (1-n) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} + n$

b) Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} E(T_k)$. Le résultat est-il logique ?

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$?

d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_k)$. Le résultat est-il logique ?

6)a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq i \leq k$. Montrer que $P(T_{k+1} = i) = \frac{i}{n} P(T_k = i) + \frac{n-i+1}{n} P(T_k = i-1)$

b) Vérifier que cette formule reste valable pour $i = k+1$

7) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $G_k = \sum_{i=1}^k P(T_k = i) X^i$. On définit également $G_0 = 1$.

a) Déduire du 6) que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $G_{k+1} = \varphi(G_k)$

b) Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $G_k = \varphi^k(G_0)$

c) Calculer $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j$

d) Déduire des questions 7)b), 7)c) et A)2)c) que $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $P(T_k = i) = \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$