

Corrigé du DM n°10

On rappelle que la série géométrique de terme général x^n est convergente pour $x \in]-1; 1[$, et que

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

La fonction S ainsi définie sur $] -1, 1[$ est de classe C^∞ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S^{(k)}$ est définie sur $] -1, 1[$ par

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

1. On a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ donc

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{S^{(k)}(x)}{k!} x^k = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} x^n = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

2. Soit $p \in]0, \frac{2}{3}[$. Dans un pays, la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants est notée q_n et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$q_n = \frac{1}{2} p^n.$$

De plus, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir une fille (ou un garçon) est $\frac{1}{2}$.

(a) On considère les événements

$A =$ "une famille a au moins un enfant" et $B_n =$ "une famille a n enfants".

On a alors

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

Par union disjointe, on a

$$q = \mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} p^n = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-p} - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{p}{1-p}$$

(b) On a alors

$$q_0 = \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{2} \frac{p}{1-p} = \frac{1}{2} \frac{2-3p}{1-p}.$$

(c) On note Y le nombre de filles d'une famille.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une famille de n enfants, Y compte alors le nombre de succès (avoir une fille) en n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc Y suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$.

Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la probabilité que cette famille ait k filles est donc

$$\text{Conclusion : } \mathbb{P}_{B_n}(Y = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k, \\ \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } n \geq k \end{cases}.$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{B_n}(Y = k) \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=0}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{B_n}(Y = k) \mathbb{P}(B_n)$$

et comme $n \geq k \geq 1$ et $\left|\frac{p}{2}\right| < 1$ les probabilités sont données par :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2} p^n = \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^k}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^{k+1}} = \frac{p^k}{(2-p)^{k+1}}.$$

(e) On sépare $n = 0$ des autres termes :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y = 0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{B_n}(Y = 0) \mathbb{P}(B_n) \\
 &= \mathbb{P}_{B_0}(Y = 0) \mathbb{P}(B_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{B_n}(Y = 0) \mathbb{P}(B_n) \\
 &= 1 \cdot q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2} p^n \\
 &= q_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \\
 &= q_0 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{p}{2}} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2 - 3p}{1 - p} + \frac{2}{2 - p} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{4 - 7p + 2p^2}{(2 - p)(1 - p)}
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{2} \frac{4 - 7p + 2p^2}{(2 - p)(1 - p)}}$

Exercice facultatif.

Soit p un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}.$$

1. Si $p = 0$, on a

$$u_n = \frac{1}{\binom{n}{n}} = 1.$$

Donc la série diverge, car le terme général ne tend pas vers 0.

Si $p = 1$, on a

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

or la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc d'après le critère de comparaison par équivalence, $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

2. (a) Comme $0 \leq n \leq n + p$, on a

$$\binom{n+p}{n} = \frac{(n+p)!}{n!p!}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 (n+p+2) u_{n+2} &= \frac{n+p+2}{\frac{(n+p+2)!}{(n+2)!p!}} \\
 &= \frac{p! (n+1)! (n+2) (n+p+2)}{(n+p+1)! (n+p+2)} \\
 &= (n+2) \frac{(n+1)! p!}{(n+p+1)!} \\
 &= (n+2) u_{n+1}
 \end{aligned}$$

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : " $S_n = \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1})$ ".

Initialisation : Pour $n = 1$ on a

$$S_1 = \sum_{k=1}^1 u_k = u_1 = \frac{1}{\binom{1+p}{1}} = \frac{1}{1+p} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1}{\binom{2+p}{2}} = \frac{2}{(2+p)(1+p)}$$

donc

$$\frac{1}{p-1} (1 - (1+p+1)u_{1+1}) = \frac{1}{p-1} \left(1 - (p+2) \frac{2}{(2+p)(1+p)} \right) = \frac{1}{p-1} \frac{p-1}{1+p} = \frac{1}{1+p} = S_1$$

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

D'une part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-1} (1 - (n+1+p+1)u_{n+2}) &= \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+2)u_{n+2}) \\ &= \frac{1}{p-1} (1 - (n+2)u_{n+1}) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1}) + u_{n+1} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1} + (p-1)u_{n+1}) \\ &= \frac{1}{p-1} (1 - (n+2)u_{n+1}) \end{aligned}$$

d'où l'égalité. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1})}$$

3. (a) On calcule la différence pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n+p+1}{\binom{n+1+p}{n+1}} - \frac{n+p}{\binom{n+p}{n}} \\ &= \frac{(n+p+1)(n+1)!p!}{(n+p+1)!} - \frac{(n+p)n!p!}{(n+p)!} \\ &= \frac{p!n!}{(n+p)!} [n+1 - (n+p)] \\ &= \frac{p!n!}{(n+p)!} (1-p) < 0 \end{aligned}$$

donc la suite (v_n) est décroissante.

- (b) Comme (v_n) est une suite de termes positifs, elle est décroissante et minorée par 0. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, (v_n) converge vers une limite $\ell \geq 0$.

- (c) Comme $v_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors

$$(n+p+1)u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Donc

$$S_n = \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p-1} (1 - \ell)$$

Donc la série de terme général u_n converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1-\ell}{p-1}.$$

4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$. (cela permet de diviser par $\frac{\ell}{n}$)

(a) On calcule la limite du quotient en faisant apparaitre la quantité connue $(n+p)u_n$

$$\frac{u_n}{\frac{\ell}{n}} = \frac{(n+p)u_n}{\ell} \frac{n}{n+p} = \frac{(n+p)u_n}{\ell} \frac{1}{1+p/n} = \frac{v_n}{\ell} \frac{1}{1+p/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$

(b) Comme la série de Riemann de terme général $\frac{\ell}{n}$ est divergente, d'après le critère de comparaison par équivalence, la série de terme général u_n diverge également. On obtient donc une contradiction avec la troisième question.

5. ℓ ne peut pas être non nul, donc $\ell = 0$. On peut donc calculer la somme de la série de terme général u_n

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{p-1}.$$