Corrigé du DM n°3

1. Pour une manche, C gagne est l'évènement contraire de A gagne ou B gagne. Donc comme A et B ne peuvent gagner en même temps ("A gagne" et "B gagne" sont disjoints)

$$\mathbb{P}(C \text{ gagne}) = 1 - \mathbb{P}\left(\text{"}A \text{ gagne"} \cup \text{"}B \text{ gagne"}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \text{ gagne}) - \mathbb{P}(B \text{ gagne}) = 1 - 2p$$

2. (a) On a :

$$GA_2 = A_1 \cap A_2, \quad GB_2 = B_1 \cap B_2 \quad \text{et} \quad GC_2 = C_1 \cap C_2.$$

Ainsi $\mathbb{P}(GA_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}_{A_1}(A_2)$ le conditionnement indiquant que le jeu continue.

$$\mathbb{P}(GA_2) = p^2.$$

De même

$$\mathbb{P}(GB_2) = p^2 \text{ et } \mathbb{P}(GC_2) = (1-2p)^2.$$

(b) On note

$$T = \text{"le jeu comporte au moins trois manches"}$$

T n'est réalisé que si ni GA_2, ni GB_2, ni GC_2 ne le sont, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}\left(\overline{GA_2} \cap \overline{GB_2} \cap \overline{GC_2}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{GA_2 \cup GB_2 \cup GC_2}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}(GA_2 \cup GB_2 \cup GC_2) = 1 - \mathbb{P}(GA_2) - \mathbb{P}(GB_2) - \mathbb{P}(GC_2) \text{ (réunion disjointe)} \\
&= 1 - 2p^2 - (1-2p)^2 = 1 - 2p^2 - 1 + 4p - 4p^2 = 4p - 6p^2 = 2p \cdot (2-3p)
\end{aligned}$$

(c) GA_3 n'est réalisé que si A gagne les deuxièmes et troisièmes manches, mais pour que le jeu ne s'arrête pas avant, il ne doit pas avoir gagné la première.

$$GA_3 = (B_1 \cup C_1) \cap A_2 \cap A_3$$

donc d'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}(GA_3) = \mathbb{P}(B_1 \cup C_1) \cdot \mathbb{P}_{B_1 \cup C_1}(A_2) \cdot \mathbb{P}_{(B_1 \cup C_1) \cap A_2}(A_3)$$

(le conditionnement spécifie ici que les manches ont bien lieu) Ainsi comme B_1 et C_1 sont disjoints

$$\mathbb{P}(GA_3) = (\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(C_1)) \times p \times p = (p + 1 - 2p)p^2 = (1-p)p^2.$$

3. (a) On a facilement

$$u_1 = \mathbb{P}(JA_1) = p, \quad v_1 = \mathbb{P}(JB_1) = p, \quad w_1 = \mathbb{P}(JC_1) = 1 - 2p$$

Pour que le jeu continue après les deux premières manches, A ne doit pas avoir gagné deux parties successives

$$JA_2 = A_2 \cap (B_1 \cup C_1).$$

Ainsi

$$u_2 = \mathbb{P}(JA_2) = \mathbb{P}(B_1 \cup C_1) \cdot \mathbb{P}_{B_1 \cup C_1}(A_2) = (1-p) \cdot p.$$

De même

$$v_2 = \mathbb{P}(JB_2) = (1-p) \cdot p \quad \text{et} \quad w_2 = \mathbb{P}(JC_2) = 2p \cdot (1-2p).$$

(b) Si A gagne à la $n+1^{ième}$ manche alors A ne peut pas avoir gagné à la $n^{ième}$ manche pour que le jeu continue

$$JA_{n+1} = A_{n+1} \cap (JB_n \cup JC_n)$$

Le conditionnement qui suit se traduit par le fait que la $n+1^{ième}$ manche a lieu.

$$\mathbb{P}(JA_{n+1}) = \mathbb{P}(JB_n \cup JC_n) \cdot \mathbb{P}_{JB_n \cup JC_n}(A_{n+1})$$

D'où comme JB_net JC_n sont disjoints :

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(JA_{n+1}) = (\mathbb{P}(JB_n) + \mathbb{P}(JC_n)) \cdot p = p \cdot (v_n + w_n)$$

et de même :

$$\mathbb{P}(JB_{n+1}) = p \cdot (\mathbb{P}(JA_n) + \mathbb{P}(JC_n)) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(JC_{n+1}) = (1-2p) \cdot (\mathbb{P}(JA_n) + \mathbb{P}(JB_n))$$

Cette égalité se vérifie facilement par récurrence. D'où

$$w_{n+1} = \mathbb{P}(JC_{n+1}) = 2(1-2p)\mathbb{P}(JA_n) = 2(1-2p)u_n.$$

(c) On a pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_{n+2} = p \cdot (v_{n+1} + w_{n+1}) = p \cdot (u_{n+1} + 2(1-2p) \cdot u_n) = p \cdot u_{n+1} + 2p \cdot (1-2p) \cdot u_n.$$

On obtient ainsi une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

4. On suppose à présent que $p = 0,2$

(a) On a donc

$$u_{n+2} = 0,2 \cdot u_{n+1} + 2 \cdot 0,2 \cdot (1 - 2 \cdot 0,2) \cdot u_n = 0,2 \cdot u_{n+1} + 0,24 \cdot u_n.$$

Cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants a pour équation caractéristique :

$$z^2 - 0,2z - 0,24 = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = 0,2^2 + 4 \cdot 0,24 = 0,04 + 0,96 = 1$$

Les racines sont

$$\alpha = \frac{0,2-1}{2} = -0,4 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{0,2+1}{2} = 0,6$$

On a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = a \cdot (-0,4)^n + b \cdot 0,6^n$$

De plus, a et b sont solutions de :

$$\begin{cases} u_1 = a \cdot (-0,4)^1 + b \cdot 0,6^1 \\ u_2 = a \cdot (-0,4)^2 + b \cdot 0,6^2 \end{cases}$$

Comme $u_1 = p = 0,2$ et $u_2 = (1-p) \cdot p = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$ on a donc :

$$\begin{cases} 0,2 = -0,4 \cdot a + 0,6 \cdot b \\ 0,16 = 0,16 \cdot a + 0,36 \cdot b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2 = -0,4 \cdot a + 0,6 \cdot b \\ 0,24 = 0,60 \cdot b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (-0,2 + 0,6 \cdot b)/0,4 = 0,04/0,4 = 0,1 \\ b = 0,24/0,6 = 0,4 \end{cases}$$

Ainsi pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = \mathbb{P}(JA_n) = 0,1 \cdot (-0,4)^n + 0,4 \cdot 0,6^n.$$

(b) On a alors

$$w_n = \mathbb{P}(JC_n) = 2(1-2p)\mathbb{P}(JA_{n-1}) = 1,2\left(0,1 \cdot (-0,4)^{n-1} + 0,4 \cdot 0,6^{n-1}\right) = 0,8 \cdot 0,6^n - 0,3 \cdot (-0,4)^n$$

(c) Le jeu n'est pas achevé à l'issue de la $n^{ième}$ manche si et seulement si JA_n, JB_n ou JC_n sont réalisés. Sa probabilité est donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(JA_n \cup JB_n \cup JC_n) &= \mathbb{P}(JA_n) + \mathbb{P}(JB_n) + \mathbb{P}(JC_n) \\ &= u_n + v_n + w_n \\ &= 2 \cdot (0,1 \cdot (-0,4)^n + 0,4 \cdot 0,6^n) + 0,8 \cdot 0,6^n - 0,3 \cdot (-0,4)^n \\ &= 1,6 \cdot 0,6^n - 0,1 \cdot (-0,4)^n \end{aligned}$$

Comme $|-0,4| < 1$ et $|0,6| < 1$, alors

$$\mathbb{P}(JA_n \cup JB_n \cup JC_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est nulle.

Exercice facultatif.

PARTIE I. Un jeu en ligne.

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

— H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
— V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
— D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
— N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Les positionnements sont déterminés par l'ensemble (sans ordre) des 3 positions distinctes parmi 9.

   Conclusion : $\boxed{\text{Il y a donc } \binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84 \text{ positionnements possibles.}}$

2. (H) est formé de 3 positionnements : ligne 1, 2 ou 3, les positionnements étant équiprobables donc $\mathbb{P}(H) = \frac{3}{84}$

   (V) est formé de 3 positionnements : colonne A, B ou C, donc $\mathbb{P}(V) = \frac{3}{84}$

   (D) comporte 2 diagonales : donc $\mathbb{P}(D) = \frac{2}{84}$

3. (H, V, D, N) étant un système complet d'événements,

$$\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(D) = 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}$$

   Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048}$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

   (a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance.
   Lors de la $i^{ème}$ relance, la société peux gagner 2 euros ou en perdre 18 sinon.
   Donc la variable aléatoire Z_i a pour univers image $Z_i(\Omega) = \{2, -18\}$. La loi de Z_i est

$$\mathbb{P}(Z_i = 2) = \mathbb{P}(N) = \frac{19}{21} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(Z_i = -18) = \frac{2}{21}$$

   donc

$$E(Z_i) = 2\,\mathbb{P}(Z_i = 2) - 18\,\mathbb{P}(Z_i = -18) = 2\,\frac{19}{21} - 18\,\frac{2}{21} = \frac{38 - 36}{21} = \frac{2}{21}$$

   Conclusion : $\boxed{E(Z_i) = \frac{2}{21} \simeq 0,1}$

   (b) Le gain journalier Z est la somme des gains à chaque relance donc

$$Z = \sum_{i=1}^{10000} Z_i \quad \text{donc} \quad E(Z) = 10000\,\frac{2}{21} \simeq 1000$$

   Conclusion : $\boxed{\text{En moyenne, la société gagnera approximativement 1000 euros par jour.}}$

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un Joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.

   (a) X est le nombre de parties gagnées en 100 parties indépendantes, la probabilité de gagner chacune étant de $\frac{2}{21}$. On effectue ainsi 100 expériences indépendantes avec une probabilité de succès de $\frac{2}{21}$, ainsi
   Conclusion : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(100, \frac{2}{21}\right)}$

   (b) On peut donc facilement conclure que
   Conclusion : $\boxed{E(X) = \frac{200}{21} \text{ et } V(X) = \frac{2}{21}\frac{19}{21}100 = \frac{200\cdot 19}{21^2}}$

   (c) En 100 parties effectuées, X sont gagnées (gain de $18X$ euros) et $100 - X$ perdues (perte de $2(100 - X)$ euros).
   La perte totale est donc $T = 2(100 - X) - 18X = 200 - 20X$.
   Conclusion : $\boxed{T = 200 - 20X}$
   On peut compter différemment : il mise 200 euros et reçoit 20 euros par partie gagnée donc $20X$ euros.

2. Avec n parties au lieu de 100, on a $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{21}\right)$. On considère l'événement

$$U = \text{« gagner au moins une partie »}$$

U est l'événement contraire de $[X=0]$, or

$$\mathbb{P}(X=0)=\binom{n}{0}\left(\frac{2}{21}\right)^0\left(\frac{19}{21}\right)^n=\left(\frac{19}{21}\right)^n$$

Donc $\mathbb{P}(U)=1-\left(\frac{19}{21}\right)^n$. Déterminons le plus petit n pour lequel $\mathbb{P}(U)\geq\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U)=1-\left(\frac{19}{21}\right)^n\geq\frac{1}{2} &\iff \left(\frac{19}{21}\right)^n\leq\frac{1}{2}\\ &\iff n\ln\left(\frac{19}{21}\right)\leq-\ln(2)\ \text{ car } x\mapsto\ln(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*\\ &\iff n\geq\frac{-\ln(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)}\simeq\frac{0,7}{0.1}\ \text{ car } \ln\left(\frac{19}{21}\right)<0\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Il faut jouer au moins 7 ou 8 parties pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure à 50\%}}$

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A,1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée » et on pose $\mathbb{P}(\Delta)=x$ avec $x\in]0,1[$.

1. Sachant Δ, les positions sont déterminées par la seule combinaison des 2 autres positions parmi les 8 restantes. Il y a donc $\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=28$ positionnements possibles et équiprobables.
   H est à présent réduit à la ligne 1, V à la colonne A et D à la diagonale descendante.
   Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}_\Delta(H)=\mathbb{P}_\Delta(V)=\mathbb{P}_\Delta(D)=\frac{1}{28}}$

2. Avec la question précédente, on a donc $\mathbb{P}_\Delta(N)=1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}$.
   Sachant $\overline{\Delta}$, l'expérience se fait dans les conditions de la partie I (le premier jeton est placé aléatoirement) et les probabilités sont donc celle de la partie I :

$$\mathbb{P}_{\overline{\Delta}}(N)=\frac{19}{21}$$

   $\left(\Delta,\overline{\Delta}\right)$ est un système complet d'événement donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N)&=\mathbb{P}_{\overline{\Delta}}(N)\cdot\mathbb{P}\left(\overline{\Delta}\right)+\mathbb{P}_\Delta(N)\cdot\mathbb{P}(\Delta)\\ &=x\frac{25}{28}+(1-x)\frac{19}{21}\\ &=x\frac{25}{4\cdot 7}+(1-x)\frac{19}{3\cdot 7}\\ &=\frac{25\cdot 3-19\cdot 4}{3\cdot 4\cdot 7}x+\frac{19}{21}\\ &=-\frac{x}{84}+\frac{19}{21}\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{La probabilité que les jetons ne soient pas alignés est égale à } \mathbb{P}(N)=-\frac{x}{84}+\frac{19}{21}}$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. La variable aléatoire G a pour univers image $G(\Omega)=\{-18,2\}$. La loi de G est donnée par

$$\mathbb{P}(G=2)=\mathbb{P}(N)=-\frac{x}{84}+\frac{19}{21}\qquad\text{et}\qquad\mathbb{P}(G=-18)=\mathbb{P}\left(\bar{N}\right)=1-\mathbb{P}(N)=1+\frac{x}{84}-\frac{19}{21}$$

   Donc

$$\begin{aligned}E(G)&=2\,\mathbb{P}(G=2)-18\,\mathbb{P}(G=-18)\\ &=2\left(-\frac{x}{84}+\frac{19}{21}\right)-18\left(1+\frac{x}{84}-\frac{19}{21}\right)\\ &=-\frac{20}{84}x+\frac{2}{21}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$E(G) > 0 \Longleftrightarrow -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} > 0 \Longleftrightarrow x < \frac{2}{21}\frac{84}{20} = \frac{2}{5}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Le gain moyen est positif si, et seulement si } x < \frac{2}{5}.}$

4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Sachant $\bar{N}$, on cherche à connaître avec quelle probabilité la fonction aléatoire a été déréglée. On cherche donc à calculer $\mathbb{P}_{\bar{N}}(\Delta)$. D'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\bar{N}}(\Delta) &= \frac{\mathbb{P}\left(\Delta \cap \bar{N}\right)}{\mathbb{P}\left(\bar{N}\right)} = \frac{\mathbb{P}(\Delta)\,\mathbb{P}_{\Delta}\left(\bar{N}\right)}{\mathbb{P}\left(\bar{N}\right)} \\ &= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{1 - \left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right)} = \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{\frac{2}{21} + \frac{x}{84}} = \frac{9x}{x+8}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si les jetons sont alignés, la fonction aléatoire a été déréglée avec une probabilité } \frac{9x}{x+8}.}$