Corrigé du DM n°4

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. On note P pour pile et F pour face : $\mathbb{P}(P) = p$ et $\mathbb{P}(F) = q$. On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu 'Pile'
- Soit si l'on a obtenu n fois 'Face'.

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de ' Pile' obtenus et enfin Y_n le nombre de 'Face' obtenus.

1. Loi de T_n

   (a) Pour tout $k \in [[1, n-1]]$
   si $k = 1$, $(T_n = 1)$ signifie que l'on n'a fait qu'un seul lancer, donc $(T_n = 1) = P_1$
   Et pour $k \geq 2$, $(T_n = 1)$ signifie que l'on a fait k lancers, donc que l'on a eu le premier pile au $k^{ième}$ et donc des faces avant.

   $$(T_n = k) = F_1 \cap \cdots \cap P_k \text{ donc}$$
   $$\mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{P}(F_1) \cdots \mathbb{P}_{F_1 \cap \cdots F_{k-1}}(P_k)$$

   le conditionnement indiquant que les lancers se continuent, puisque l'on n'a pas 'Pile' et pas encore effectué n lancers. Donc $\mathbb{P}(T_n = k) = q^{k-1}p$ formule encore valable pour $k = 1$.
   Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(T_n = k) = q^{k-1}p \text{ pour } k \in [[1, n-1]]}$

   (b) $(T = n)$ signifie que l'on a effectué n lancers, c'est à dire que l'on n'a pas eu de 'Pile' jusqu'au précédent. Les lancers se terminant de toute façon au $n^{ième}$ si l'on n'a que 'Face'.
   Donc
   $$(T_n = n) = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1}$$
   Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(T_n = n) = q^{n-1}}$

   (c) Dans la somme, il faut isoler la valeur $k = n$ qui n'a pas la même formule que les autres :
   $$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}p + q^{n-1} = p\sum_{k=0}^{n-2} q^k + q^{n-1} = p\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q^{n-1} = p\frac{1-q^{n-1}}{p} + q^{n-1} = 1$$

   (d) T_n étant finie, elle a une espérance et
   $$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}p + nq^{n-1}$$
   Pour $n \geq 2$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$."
   <u>Initialisation :</u> Pour $n = 2$ on a $E(T_2) = p + 2q$ et
   $$\begin{aligned}\frac{1-q^2}{1-q} &= 1 + q = p + q + q \\ &= p + 2q = E(T_2)\end{aligned}$$
   $\mathcal{P}(2)$ est donc vraie.
   <u>Hérédité :</u> On suppose que pour un $n \geq 2$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ alors
   $$\begin{aligned}E(T_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}p + (n+1)q^n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}p + nq^{n-1}p + (n+1)q^n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}p + nq^{n-1}(1-q) + (n+1)q^n \\ &= E(T_n) + q^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Initialisation : $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 2 : E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}}$

2. Loi de X_n.

a) et b) Lors des lancers, on a ou bien un Pile et on s'arrête, ou bien n faces.
Donc $X_n(\Omega) = \{0,1\}$ avec $(X_n = 0) =$ 'n faces' et $\mathbb{P}(X_n = 0) = q^n$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1-q^n) \\ E(X_n) = 1-q^n \end{array}}$

3. Loi de Y_n

(a) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(Y_n = k)$ signifie que l'on a eu k Faces (donc pas n) et donc ensuite un Pile.

$$\begin{aligned} (Y_n = k) &= F_1 \cap \cdots F_k \cap P_{k+1} \text{ donc (probas composées)} \\ \mathbb{P}(Y_n = k) &= q^k p \end{aligned}$$

(b) $(Y_n = n)$ signifie que l'on a eu n Face donc $\mathbb{P}(Y_n = n) = q^n$

(c) Le nombre total de lancers est le nombre total de Pile et de Face obtenus.
Conclusion : $\boxed{T_n = X_n + Y_n}$
donc $Y_n = T_n - X_n$ et

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= E(T_n) - E(X_n) \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) \\ &= (1-q^n)\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) \\ &= (1-q^n)\frac{q}{1-q} \end{aligned}$$

Exercice facultatif.

1. Y_n est le nombre de n chaines de Piles en n lancers, il y en a au plus 1 qui n'est réalisée que si tous les lancers ont donné pile. Donc $Y_n(\Omega) = \{0,1\}$. De plus,

$$[Y_n = 1] = P_1 \cap \cdots \cap P_n.$$

Comme les lancers sont indépendants :

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(P_1) \ldots \mathbb{P}(P_n) = p^n$$

donc $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - p^n$ et $E(Y_n) = p^n$

2. Pour avoir l'événement $[Y_{n-1} = 1]$, il faut avoir une $n-1$ chaine de Piles. Il ne reste donc qu'un seul lancer Face qui ne peutêtre qu'au début ou à la fin :

$$[Y_{n-1} = 1] = (P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n)$$

Comme l'union est incompatible et les lancers sont indépendants donc

$$\mathbb{P}(Y_{n-1} = 1) = \mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) = p^{n-1}q + qp^{n-1} = 2qp^{n-1}.$$

Les seules valeurs possibles de Y_{n-1} sont 0 et 1, on a :

$$E(Y_{n-1}) = 0\mathbb{P}(Y_{n-1} = 0) + 1\mathbb{P}(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$$

3. Dans cette question, pour $k \in [\![1, n-2]\!]$ et $i \in [\![1, n]\!]$ on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de Piles commence au i^{eme} lancer et qui vaut 0 sinon.

(a) Avoir $[X_{1,k} = 1]$ signifie qu'une k chaine de Piles commence au premier lancer (et se finit donc au $k+1^{\text{ème}} < n$).

$$[X_{1,k} = 1] = P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1},$$

Comme les lancers sont indépendants

$$\mathbb{P}(X_{1,k} = 1) = \mathbb{P}(P_1) \ldots \mathbb{P}(P_k)\,\mathbb{P}(F_{k+1}) = p^k q.$$

(b) Avoir $[X_{i,k}=1]$ signifie qu'une telle chaine commence au $i^{ème}$ lancer (avec $i \geq 2$) et donc que le $i-1^{ème}$ lancer est un Face, qu'elle se finit au $k+i-1^{ème}$ et est donc suivie d'un Face au $k+i^{ème}$ lancer (avec $k+i \leq n$).

$$[X_{1,k}=1] = F_{i-1} \cap P_i \cdots \cap P_{k+i-1} \cap F_{k+i}.$$

Comme les lancers sont indépendants pour $i \in [\![2, n-k]\!]$, on a bien

$$\mathbb{P}(X_{i,k}=1) = q^2 p^k.$$

(c) Enfin pour $[X_{n-k+1,k}=1]$, on a k Piles à partir du $n-k+1^{ème}$ lancer donc jusqu'au $n^{ième}$ lancer.

$$[X_{n-k+1,k}=1] = F_{n-k} \cap P_{n-k+1} \cap \cdots \cap P_n,$$

donc

$$\mathbb{P}(X_{n-k+1,k}=1) = qp^k.$$

(d) Le nombre total de k listes de Piles est la somme de celles qui commencent à 1, à 2 ... à $n-k+1$:

$$Y_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} X_{i,k}$$

Par linéarité de la somme, on a

$$E(Y_k) = \sum_{i=1}^{n-k+1} E(X_{i,k}).$$

Comme pour $i \in [\![2, n-k]\!]$, $E(X_{i,k}) = q^2 p^k$ et $E(X_{n-k+1,k}=1) = qp^k$ et $E(X_{1,k}=1) = qp^k$ alors

$$E(Y_k) = qp^k + \sum_{i=2}^{n-k} qp^k + qp^k = 2qp^k + q^2 p^h \sum_{i=2}^{n-k} 1 = 2qp^k + (n-k-1)\, q^2 p^k.$$