Corrigé du DM n°6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1. (a) On a pour tout réel x : si $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^{2x}}+1} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = f(x)$$

Donc f est paire.

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x\left(e^{2x}+1\right) - e^x e^{2x} 2}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2}\left(1-e^{2x}\right) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-e^{2x}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

En $-\infty$: $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

En $+\infty$, on a par symétrie $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c) On étudie les variations de la différence : $g(x) = f(x) - x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f'(x) - 1$.

Sur $\mathbb{R}^-$, on a $f(x) > 0$ donc $f(x) > x$ et $f(x) = x$ n'y a pas de solution.

Sur $\mathbb{R}^+$, on a $f'(x) \leq 0$ donc $g'(x) < 0$.

On a donc g qui est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right] =]-\infty, 1/2]$.

Comme $0 \in]-\infty, 1/2]$, alors d'après le théorème de la bijection l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution ℓ sur $\mathbb{R}^+$.

Conclusion : $\boxed{\text{L'équation } f(\ell) = \ell \text{ a une unique solution } \ell \text{ sur } \mathbb{R}.}$

(d) $g(1/2) = f(1/2) - 1/2 < 0$ donc $g(0) = 1/2 \geq g(\ell) \geq g(1/2)$ et comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et qu'ils en sont éléments.

Conclusion : $\boxed{0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}.}$

(e) Pour $x \leq 0$ on a $|f'(x)| = f'(x)$ et

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} &= \frac{e^x - e^{3x} - e^x\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{-2e^{3x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Pour $x \geq 0$ on a $|f'(x)| = -f'(x)$ et

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) = -\frac{e^x - e^{3x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} &= \frac{-e^x + e^{3x} - e^x\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{-2e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Et comme f est maximale en 0, on a bien

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq f(x) \leq f(0) = \frac{1}{2}.}$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \in [0, 1/2]$."
Initialisation : $u_0 = 0$ donc $u_0 \in [0, 1/2]$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in [0, 1/2]$, alors, d'après la question 1.(c), on a $f(u_n) \in [0, 1/2]$.
Donc $u_{n+1} \in [0, 1/2]$, $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1/2].}$

(b) f est continue sur $[0, 1/2]$ et dérivable sur l'intervalle $]0, 1/2[$. De plus, d'après les précédentes questions, $u_n \in [0, 1/2]$, $l \in [0, 1/2]$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x de $[0, 1/2]$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$|f(u_n) - f(\ell)| = |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|.}$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$."
Initialisation : $|u_0 - \ell| = \ell \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{0+1}}$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ alors, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n+1}}$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.}$

(d) Alors comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ on a $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par encadrement $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc
Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell.}$

(e) u_n donnera une valeur approvchée de ℓ à 10^{-3} près si $|u_n - \ell| \leq 10^{-3}$ ce qui sera réalisé si $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3}$

```
import math
u=0
p=1/2
while p>10**(-3) :
    p=p/2
    u=math.exp(u)/(1+math.exp(2*u))
print(u)
```

Exercice facultatif.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n \ : \ [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales $\mathbf{P_n}$

1. Pour $k \geq 1$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$ donc

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \quad \text{réindexé } h = k-1 \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{h+1} x^h = -\sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^h \\ &= -\frac{(-x)^{2n} - 1}{-x-1} = \frac{x^{2n}-1}{x+1} \quad \text{car } -x \neq 1 \end{aligned}$$

2. P_n' est du signe de $x^{2n} - 1$ et comme $2n > 0$ la fonction $x \to x^{2n} - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ puisque $2n$ est pair) donc

x	0		1		$+\infty$
$x^{2n}-1$		$-$	0	$+$	
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

en $+\infty$ on a :

$$P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n} = x^{2n}\left(-\frac{1}{x^{2n-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^{2n-2}} + \ldots + \frac{-1}{2n-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2n}\right) \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$$

3. Comme $P_n(0) = 0$ et que P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors $P_n(1) < P_n(0) = 0$
4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right) \end{aligned}$$

(b) On a donc en particulier pour $x = 2$:

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2}\right)$$

Et comme $-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} = \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0$, $P_{n+1}(2) \geq P_n(2)$ la suite $(P_n(2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors croissante.
Comme de plus $P_1(2) = -\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1 \geq 0$ alors pour tout entier $n \geq 1$: $P_n(2) \geq P_1(2) \geq 0$

5. P_n est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc bijective de $[1,+\infty[$ dans $[P_n(1), +\infty]$
On utilise alors le théorème de bijection : $P_n(1) < 0 \leq P_n(2)$ donc $0 \in [P_n(1), P_n(2)]$.
Donc l'équation $P_n(x) = 0$ a une unique solution sur $[1,+\infty[$ et $x_n \in]1,2]$.

II. Limite de la suite $(\mathbf{x_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*}$

1. On a vu précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$: $P_n'(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$. P_n est donc la primitive qui s'annule en 0 de $t \mapsto \dfrac{t^{2n}-1}{t+1}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt &= [P_n(t)]_0^x = P_n(x) - P_n(0) \\ &= P_n(x) \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P_n(x_n) = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} = 0$. Par la relation de Chasles

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = 0$$

d'où

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt$$

3. On étudie les variations de la différence : Soit $f_n(x) = t^{2n} - 1 - n(t^2-1)$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt\left(t^{2n-2}-1\right)$.
et pour $n \geq 1$ on aura $2n-2 \geq 0$ donc si $t \geq 1$ alors $t^{2n-2} \geq 1$ d'où $f_n'(t) \geq 0$
Donc pour $n \geq 1$, f_n est croissante sur $[1,+\infty[$.
De plus $f_n(1) = 0$, donc pour tout $t \in [1,+\infty[$: $f_n(t) \geq 0$ et

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2-1)$$

4. On a alors tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $t \geq 1$

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq \frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1}$$

comme $1 \leq x_n$ (bornes de l'intégrale croisssantes)

$$\begin{aligned} \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt &\geq \int_1^{x_n} \frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1}\,dt = \int_1^{x_n} n(t-1)\,dt = n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^{x_n} \\ &\geq \frac{n(x_n-1)^2}{2} \end{aligned}$$

que l'on réintroduit dans l'équation de la question II.2. pour obtenir :

$$\frac{n\left(x_n-1\right)^2}{2} \leq \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\ dt$$

intégrale que l'on majore à nouveau par $1-t^{2n} \leq 1$ d'où (bornes croissantes)

$$\int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\ dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t+1}\ dt = \left[\ln\left(t+1\right)\right]_0^1 = \ln\left(2\right)$$

d'où finalement :

$$\begin{array}{lll} 0 & \leq & \dfrac{n\left(x_n-1\right)^2}{2} \leq \ln\left(2\right) \\ 0 & < & \left(x_n-1\right)^2 \leqslant \dfrac{2\ln 2}{n} \\ 0 & < & x_n - 1 \leqslant \dfrac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}} \quad \text{car } x_n - 1 \geq 0 \text{ et } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*. \end{array}$$

5. Et par encadrement $x_n - 1 \to 0$ et donc $x_n \to 1$ quand $n \to +\infty$