Corrigé du DM n°7

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = (n+1)x^{n-1} \left(x + \frac{n}{n+1} \right)$$

Si n est pair, on a alors $n-1$ impair et le signe de f' est alors :

x	$-\frac{n}{n+1}$	0		
x^{n-1}	-	-	0	+
$x + \frac{n}{n+1}$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$
			0	$\nearrow$
				$+\infty$

Si n est impair, on a alors $n-1$ pair et le signe de f' est alors :

x	$-\frac{n}{n+1}$	0		
x^{n-1}	+	+	0	+
$x + \frac{n}{n+1}$	-	0	+	+
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\frac{n}{n+1}\right)$	$\nearrow$
			0	$\nearrow$
				$+\infty$

(b) Si n est impair, on a d'après le sens de variation, $f\left(-\frac{n}{n+1}\right) < f(0) = 0 < 2$

Si n est pair, $\frac{n}{n+1} < 1$ donc $\left(-\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1^n$ et $\left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < 0$ donc $f\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$

(c) f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, donc d'après le théorème de la bijection monotone, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution sur $[0, +\infty[: x = 1$ (car $f(1) = 2$).

- Si n est pair : d'après les variations de f et $f\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$, il n'y a pas de solution sur $]-\infty, 0]$ et elle a donc $x = 1$ pour unique solution sur $\mathbb{R}$.
- Si n est impair : f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{n}{n+1}]$ dans $\left[f\left(-\frac{n}{n+1}\right), +\infty\right]$, donc . Comme $f\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$, d'après le théorème de la bijection monotone, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution sur $]-\infty, -\frac{n}{n+1}]$. De plus, d'après les variations de f , elle n'en a pas sur $]-\frac{n}{n+1}, 0]$. Elle a donc deux solutions : $\alpha < 0$ et 1.

2. (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A \cdot P = P \cdot D &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+x & 1+y \\ 1+x & 1+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x=0 & 1+y=2 \\ 1+x=0 & 1+y=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) On trouve P^{-1} en posant le système $PX = Y$. Ainsi P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $A \cdot P = P \cdot D$, en multipliant à droite par P^{-1} on obtient

$$A = A \cdot P \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

et en multipliant à gauche par P^{-1}

$$D = P^{-1} \cdot P \cdot D = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

3. (a) Si $X^{n+1} + X^n = A$, alors

$$\begin{aligned} X^{n+1} + X^n = A &\Leftrightarrow P^{-1} \cdot (X^{n+1} + X^n)P = P \cdot A \cdot P^{-1} \\ &\Leftrightarrow P^{-1} \cdot X^{n+1} \cdot P + P^{-1} \cdot X^n \cdot P = D \Leftrightarrow (P^{-1}XP)^{n+1} + (P^{-1}XP)^n = D \end{aligned}$$

Donc en posant $Y = P^{-1}XP$, Y est solution de (E'_n) .

(b) Soit Y une solution de (E'_n) . On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

i. Si Y est solution de (E'_n) alors $Y^{n+1} + Y^n = D$ donc

$$D \cdot Y = (Y^{n+1} + Y^n) \cdot Y = Y^{n+2} + Y^{n+1} = Y \cdot (Y^{n+1} + Y^n) = Y \cdot D$$

ii. Comme $YD = DY$ alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

donc $c = 0$ et $b = 0$

iii. Donc $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est diagonale, on connaît donc ses puissances : $Y^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$ et

$$Y^{n+1} + Y^n = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^{n+1} + a^n & 0 \\ 0 & d^{n+1} + d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{n+1} + a^n = 0 \\ d^{n+1} + d^n = 2 \end{cases}$$

Or $a^{n+1} + a^n = a^n(a+1)$, donc la première équation a pour solutions $a = -1$ et $a = 0$.

iv. La seconde équation a pour unique solution $d = 1$ si n est pair et pour solutions $d = \alpha$ et $d = 1$ si n est impair.

On a donc

- Si n est pair, on a 2 solutions pour (E'_n) et donc 2 solutions pour (E_n) via le changement de variable $X = PYP^{-1}$
- Si n est impair, on a 4 solutions (4 valeurs possibles pour le couple (a, d)) pour (E'_n) et donc 4 solutions pour (E_n) .

(c) L'équation $x^4 + x^3 = 2$ est l'équation (E_3) . Comme 3 est impair, cette équation a donc 4 solutions :

$$X = PYP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & -a+d \\ -a+d & a+d \end{pmatrix}$$

Comme $a = -1$ ou 0 et $d = \alpha$ ou 1 , l'ensemble des solutions de (E_3) est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+\alpha & -1+\alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

Exercice facultatif.

Partie 1

1. On a :

$$\begin{aligned} M(a) \cdot M(b) &= \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2b-2a+4ab+2b & a+b-3ab & a+b-3ab \\ a-2ab+b-2ba+ab & 1-2(a+b-3ab) & a+b-3ab \\ ab+a-2ab+b-2ba & a+b-3ab & 1-2(a+b-3ab) \end{pmatrix} = M(a+b-3ab) \end{aligned}$$

2. On cherche l'inverse de $M(a)$ sous la forme de $M(b)$. Comme $M(0) = I$, il suffit d'avoir $M(a)M(b) = M(0)$ donc

$$a+b-3ab=0 \Leftrightarrow b(1-3a) = -a \Leftrightarrow b = -a/(1-3a) \quad \text{si } a \neq 1/3$$

Donc si $a \neq 1/3$ on a $b = -a/(1-3a)$ qui est solution. Donc avec cette valeur de b , $M(a) \cdot M(b) = M(0) = I$ et $M(b) \cdot M(a) = I$ donc $M(a)$ est inversible et son inverse est :

$$M(a)^{-1} = M\left(\frac{-a}{1-3a}\right).$$

On a

$$M(1/3)^2 = M(1/3)M(1/3) = M(1/3 + 1/3 - 1/3) = M(1/3).$$

Raisonnons par l'absurde. Si $M(1/3)$ est inversible alors on peut multiplier l'équation $M(1/3)^2 = M(1/3)$ par $M(1/3)^{-1}$ pour obtenir $M(1/3) = I$. Or $M(1/3) \neq I$

Conclusion : $M(1/3)$ n'est pas inversible.

3. $a_0 = 1/3$ est une solution de $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$. Est-ce la seule ?

$$\begin{aligned} [M(x)]^2 = M(x) &\Leftrightarrow M(2x - 3x^2) = M(x) \\ &\Leftrightarrow 2x - 3x^2 = x \\ &\Leftrightarrow x - 3x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(1 - 3x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1/3 \end{aligned}$$

Conclusion : La seule solution non nulle de $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$ est donc $a_0 = 1/3$.

4. On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$

$$\text{On a donc } P^2 = P, \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) On rappelle que $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$ et on a

$$P + \alpha Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1+2\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} M(a) = P + \alpha Q &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\alpha = 3(1-2a) \\ 1-\alpha = 3a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2-6a \\ \alpha = 1-3a \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1-3a. \end{aligned}$$

Donc seul $\alpha = 1 - 3a$ convient pour : $M(a) = P + \alpha Q$.

Conclusion : $\alpha = 1 - 3a$.

(b) D'après la définition de P et la question I.3., $P^2 = P$.

$$QP = (I - P)P = P - P^2 = P - P = 0.$$

$$PQ = P(I - P) = P - P^2 = 0.$$

$$Q^2 = (I - P)^2 = I - P - P + P^2 = I - 2P + P = I - P = Q.$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "il existe x_n et y_n réels tels que $[M(a)]^n = x_n P + y_n Q$."

Initialisation : $[M(a)]^1 = M(a) = P + \alpha Q$, donc $x_1 = 1$ et $y_1 = \alpha$ conviennent. $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.

Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe x_n et y_n réels tels que $[M(a)]^n = x_n P + y_n Q$ alors,

$$[M(a)]^{n+1} = (x_n P + y_n Q)(P + \alpha Q) = x_n P^2 + y_n QP + \alpha x_n PQ + \alpha y_n Q^2 = x_n P + \alpha y_n Q.$$

Donc avec $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \alpha y_n$ qui sont bien des réels, on a $[M(a)]^{n+1} = x_{n+1} P + y_{n+1} Q$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe x_n et y_n réels tels que $[M(a)]^n = x_n P + y_n Q$.

Donc avec $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \alpha y_n$ qui sont bien des réels, on a $[M(a)]^{n+1} = x_{n+1} P + y_{n+1} Q$

(d) La suite (x_n) est constante donc égale à $x_1 = 1$ et la suite (y_n) est géométrique de raison α donc $y_n = \alpha^{n-1} y_1 = \alpha^n$.

Conclusion : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[M(a)]^n = P + \alpha^n Q$.

On a donc avec $\alpha = 1 - 3a$

$$M(a)^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^n}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\alpha^n & 1-\alpha^n & 1-\alpha^n \\ 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n & 1-\alpha^n \\ 1-\alpha^n & 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n \end{pmatrix}.$$

Partie 2

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in]0, \frac{2}{3}[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1 , et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1 - 2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1 - 2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1 - 2a)r_n \end{cases}$$

(a) Comme $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ on a alors pour tout entier n ,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = [M(a)]^{n-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = [P + \alpha^{n-1}Q] \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix}.$$

(b) On a $\alpha = 1 - 3a$ et comme $0 < a < 2/3$ alors

$$\begin{aligned} -2 < -3a < 0 \\ -1 < 1 - 3a < 1 \end{aligned}$$

donc $|\alpha| < 1$ donc $\alpha^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} P \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (p_1 + q_1 + r_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : Les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont la même limite $\frac{p_1 + q_1 + r_1}{3}$.

2. (a) (M_n, S_n, B_n) formant un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} p(M_{n+1}) &= p_{M_n}(M_{n+1})p(M_n) + p_{S_n}(M_{n+1})p(S_n) + p_{B_n}(M_{n+1})p(B_n) \\ &= \frac{2}{3}p(M_n) + \frac{1}{6}p(S_n) + \frac{1}{6}p(B_n) \end{aligned}$$

et de la même façon

$$\begin{aligned} p(S_{n+1}) &= \frac{1}{6}p(M_n) + \frac{2}{3}p(S_n) + \frac{1}{6}p(B_n) \\ p(B_{n+1}) &= \frac{1}{6}p(M_n) + \frac{1}{6}p(S_n) + \frac{2}{3}p(B_n). \end{aligned}$$

(b) On retrouve les relations de récurrence précédentes avec $p_n = p(M_n)$, $q_n = p(S_n)$ et $r_n = p(B_n)$ et

$$a = \frac{1}{6} \in]0, \frac{2}{3}[\quad \text{et} \quad \alpha = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p(M_n) \\ p(S_n) \\ p(B_n) \end{pmatrix} &= \left[M\left(\frac{1}{6}\right) \right]^{n-1} \begin{pmatrix} p(M_1) \\ p(S_1) \\ p(B_1) \end{pmatrix} \\ &= \left(P + \frac{1}{2^{n-1}}Q \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^{n-1}}Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ 1 + \frac{2}{2^{n-1}} \\ 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion : $p(M_n) = p(B_n) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$ et $p(S_n) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{2^{n-1}} \right)$.

(c) Et quand n tend vers $+\infty$, ces trois probabilités tendent vers $\frac{1}{3}$.