

Corrigé du DM n°8

1. Soit $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x^2$. u et v sont C^1 sur $[1, e]$, $u'(x) = 1/x$ et $v(x) = x^3/3$. D'où en intégrant par parties :

$$I_1 = \left[\ln(x) \frac{x^3}{3} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3x} dx = e^3/3 - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e = e^3/3 - e^3/9 + 1/9 = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

2. (a) Si $1 \leq x \leq e$

$$\ln(x)^{n+1} - \ln(x)^n = \ln(x)^n (\ln(x) - 1).$$

comme $\ln$ est croissante sur $]0, +\infty[$ et que 1 et n en sont éléments,

$$0 = \ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(e) = 1.$$

Donc $\ln(x)^n \geq 0$ et $\ln(x) - 1 \leq 0$ d'où

$$\ln(x)^{n+1} \leq \ln(x)^n.$$

Et comme $x^2 \geq 0$ alors

$$x^2 \ln(x)^{n+1} \leq x^2 \ln(x)^n.$$

Enfin comme $1 \leq e$,

$$\int_1^e x^2 \ln(x)^{n+1} dx \leq \int_1^e x^2 \ln(x)^n dx.$$

La suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante.

- (b) Comme de plus $0 \leq x^2 \ln(x)^n$ pour $x \in [1, e]$ alors

$$I_n \geq 0.$$

I est donc une suite décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, I est convergente (et sa limite $\ell \geq 0$)

- (c) Soit $f(x) = \ln(x) - \frac{x}{e}$. f est dérivable sur $[1, e]$ et

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{e \cdot x} \geq 0.$$

Donc f est croissante sur $[1, e]$. Et comme $f(e) = 0$, f est négative sur $[1, e]$ et

$$0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}.$$

- (d) Comme $x \rightarrow x^n$ est croissante sur $[0, +\infty[$ (pour $n > 0$) et que $\ln(x)$ et x/e en sont éléments,

$$\ln(x)^n \leq \frac{x^n}{e^n} \quad \text{et} \quad x^2 \ln(x)^n \leq \frac{x^{n+2}}{e^n}.$$

Enfin, comme $1 \leq e$,

$$0 \leq \int_1^e x^2 \ln(x)^n dx \leq \int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n} dx = \left[\frac{x^{n+3}}{(n+3)e^n} \right]_1^e = \frac{e^3}{(n+3)} - \frac{1}{(n+3)e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

3. (a) Effectuons le changement de variable $t = \ln(x) = \varphi(x)$, φ de classe C^1 et bijective de $[1, e]$ dans $[0, 1]$.

(i) (Changement de variable)

$$t = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = e^t$$

(ii) (Élément différentiel)

$$dt = \frac{1}{x} dx \quad \Leftrightarrow \quad dx = e^t dt$$

(iii) (Nouvelles bornes)

$$\text{si } x = 1 \text{ alors } t = 0$$

$$\text{si } x = e \text{ alors } t = 1$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer)

$$t^n (e^t)^2 = t^n e^{2t}.$$

(v) (Conclusion)

$$\int_1^e x^2 \ln(x)^n dx = \int_0^1 t^n e^{2t} e^t dt = \int_0^1 t^n e^{3t} dt.$$

(b) Pour $t \in [0, 1]$, on a

$$t^n e^{3t} \leq t^n e^3.$$

En intégrant sur $[0, 1]$, on a

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n e^3 dt = \frac{e^3}{n+1}.$$

Donc par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

4. (a) Soit $u(x) = \ln(x)^{n+1}$ et $v'(x) = x^2$. u et v sont C^1 sur $[1, e]$, $u'(x) = (n+1) \ln(x)^n/x$ et $v(x) = x^3/3$. D'où en intégrant par parties :

$$I_{n+1} = [\ln(x)^{n+1} \cdot x^3/3]_1^e - \int_1^e (n+1) \frac{x^3 \ln(x)^n}{3 \cdot x} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{(n+1)}{3} \cdot \int_1^e x^2 \ln(x)^n dx = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

Donc

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

(b) On en déduit que

$$n \cdot I_n = \left(\frac{e^3}{3} - I_{n+1} \right) \frac{3 \cdot n}{n+1} = \left(\frac{e^3}{3} - I_{n+1} \right) \frac{3 \cdot n}{n(1 + 1/n)}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot I_n = e^3$$

Exercice facultatif.

On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : [2, +\infty[&\longleftarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

1. Pour tout $x \geq 2$,

- $0 < x^2 - 1 \leq x^2$, donc $0 < \sqrt{x^2 - 1} \leq \sqrt{x^2} = |x| = x$, ainsi $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \geq \frac{1}{x}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
- $x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$ donc $x^2 \geq x$ et $\sqrt{x^2 - 1} \geq \sqrt{x - 1} > 0$, donc $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$.

$$\text{Conclusion : } \boxed{\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x - 1}}}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_2^n f(x) dx.$$

(a) On réutilise l'inégalité précédente pour avoir la limite par minoration :

$\frac{1}{x} \leq f(x)$ pour tout $x \geq 2$ donc, pour $n \geq 2$ (ordre des bornes)

$$\int_2^n f(x) dx \geq \int_2^n \frac{1}{x} dx = \ln(n) - \ln(2)$$

De plus $\ln(n) - \ln(2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, alors, par minoration

$$\text{Conclusion : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty}$$

(b) On définit la fonction

$$\begin{aligned} F : [2, +\infty[&\longleftarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \end{aligned}$$

Pour $x \in [2, +\infty[$, on a $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$, F est donc dérivable sur $[2, +\infty[$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc F est une primitive de f sur $[2; +\infty[$ et

$$\text{Conclusion : } \boxed{I_n = F(n) - F(2) = \ln(n + \sqrt{n^2 - 1}) - \ln(2 + \sqrt{3})}$$

(c) On lève la forme indéterminée en factorisant à l'intérieur de la racine puis du logarithme.

$$\begin{aligned} F(n) - \ln(n) &= \ln(n + \sqrt{n^2 - 1}) - \ln(n) \\ &= \ln\left(n + \sqrt{n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}\right) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n + |n| \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2) \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{I_n - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2) - \ln(2 + \sqrt{3})}$$

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

(a)

```
import math
n = int(input("Entrez la valeur de n"))
S=0
for k in range(2,n+1)
    S=S+1/math.sqrt(k**2-1)
print(S)
```

(b) On va encadrer f sur chaque intervalle $[k, k+1]$ et écrire $I_n = \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx$.

Pour $k \geq 2$, la fonction f est décroissante sur $[k, k+1]$, donc pour $k \leq x \leq k+1$

$$\frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2 - 1}}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2 - 1}}$$

Le membre de droite donne pour $h = k+1 \geq 3$: $\int_{h-1}^h \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{h^2 - 1}}$. Donc pour $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

En sommant on obtient

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = I_{n+1},$$

et

$$\sum_{h=3}^n \frac{1}{\sqrt{h^2-1}} \leq \sum_{h=3}^n \int_{h-1}^h \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int_2^n \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = I_n \iff \sum_{h=2}^n \frac{1}{\sqrt{h^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sum_{h=3}^n \frac{1}{\sqrt{h^2-1}} \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

(c) Comme (I_n) est une suite croissante, on a

$$I_n \leq I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

Ainsi

$$1 \leq \frac{S_n}{I_n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par encadrement, $\frac{S_n}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Par ailleurs, on a vu à la question 2.(c) que

$$I_n - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2) - \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Donc

$$\frac{I_n}{\ln(n)} - 1 = \frac{I_n - \ln(n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

Ainsi

$$\frac{I_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\frac{S_n}{\ln(n)} = \frac{S_n}{I_n} \frac{I_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}.$$