Corrigé du DM n°9

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Soient x et $y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \leq y$. Alors pour tout $t \in [0,1]$,

$$-tx \geq -ty \quad \text{donc } e^{-tx} \geq e^{-ty} \quad \text{car exp est strictment croissante sur} \mathbb{R}.$$

Et comme $t^k \geq 0$, on a : $t^k e^{-tx} \geq t^k e^{-ty}$ et comme les bornes sont croissantes,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \text{si} \quad x \leq y \quad \text{alors} \quad f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt \geq \int_0^1 t^k e^{-ty} dt = f_k(y)$$

donc f_k est bien décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k(0) = \int_0^1 t^k e^{-t0} dt = \int_0^1 t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

et comme f_k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, si $x \geq 0$ alors

$$f_k(x) \leq f_k(0) = \frac{1}{k+1}$$

Et comme pour tout $t \in [0,1]$, $t^k e^{-tx} \geq 0$ et que $0 \leq 1$ alors

$$0 = \int_0^1 0 dt \leq f_k(x) \leq \frac{1}{k+1}$$

et par encadrement $\quad f_k(x) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

2. (a) On calcule f_{k+1} en intégrant par parties :

$$f_{k+1}(x) = \int_0^1 t^{k+1} e^{-tx} dt$$

soit $F(t) = t^{k+1}$ de classe $C^1[0,1]$, $\quad F'(t) = (k+1)t^k$
soit $g(t) = e^{-tx}$ continue sur $[0,1]$, $\quad G(t) = -\frac{1}{x} e^{-tx}$ donc

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \left[-\frac{1}{x} e^{-tx} t^{k+1}\right]_{t=0}^1 - \int_0^1 -\frac{1}{x} e^{-tx} (k+1) t^k dt \\ &= -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x} \int_0^1 t^k e^{-tx} dt = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x} \end{aligned}$$

(b) On a

$$f_0(x) = \int_0^1 t^0 e^{-tx} dt = \int_0^1 e^{-tx} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-tx}\right]_{t=0}^1 = \frac{1 - e^{-x}}{x}$$

et on utilise ensuite la relation de récurrence :

$$f_1(x) = \frac{0+1}{x} f_0(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x} \frac{1 - e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1 - e^{-x} - xe^{-x}}{x^2}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1+1}{x} f_1(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{2}{x} \frac{1 - e^{-x} - xe^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} \\ &= \frac{2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}}{x^3} \end{aligned}$$

(c) On a

$$x f_0(x) = 1 - e^{-x} = \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

(d) On monte alors par récurrence sur k, la proposition $\mathcal{P}_k$

$$„\frac{x^{k+1}}{k!}\,f_k(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1”$$

Initialisation : pour $k=0$,, on a bien $\dfrac{x^{0+1}}{0!}\,f_0(x) = x\,f_0(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k\in\mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie, i.e. $\dfrac{x^{k+2}}{(k+1)!}\,f_{k+1}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\frac{x^{k+2}}{(k+1)!}\,f_{k+1}(x) = \frac{x^{k+2}}{(k+1)!}\left(\frac{k+1}{x}f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}\right) = \frac{x^{k+1}f_k(x)}{k!} - \frac{x^{k+1}e^{-x}}{(k+1)!} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

car $x^{k+1} \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ et $\dfrac{x^{k+1}}{k!}\,f_k(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie
On en conclut que pour tout entier k :

$$\frac{x^{k+1}}{k!}\,f_k(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

3. (a) On effectue dans

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx}dt$$

le changement de variable $u=tx \Leftrightarrow t=u/x$ on a alors les correspondances : $\frac{1}{x}du \longleftrightarrow dt$ pour $x\neq 0$
$t=0 \longleftrightarrow u=0$, et $t=1 \longleftrightarrow u=x$ et avec la fonction $t\mapsto t^k e^{-tx}$ qui est continue sur $[0,1]$ et $u\mapsto u/x$ qui est de classe C^1 sur $[0,x]$ à valeurs dans $[0,1]$ on a

$$f_k(x) = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u}\frac{1}{x}du = \frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x u^k e^{-u}du$$

(b) Comme $u\mapsto u^k e^{-u}$ est continue sur $]0,+\infty[$ alors $x\mapsto \int_0^x u^k e^{-u}du$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Et de plus $x\mapsto 1/x^{k+1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc f_k est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$f_k'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}\int_0^x u^k e^{-u}du + \frac{1}{x^{k+1}}x^k e^{-x} = -\frac{(k+1)}{x}f_k\,(x) + \frac{e^{-x}}{x}.$$

(c) On reconnait facilement que $f_k'\,(x) = -f_{k+1}\,(x)$.

(d) On étudie le sens de variations de la différence : $g\,(y) = 1-e^{-y}-y$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'\,(y) = e^{-y}-1$.

y		0	
$g'\,(y)$	$+$	0	$-$
g		0	
	$\nearrow$		$\searrow$

Donc pour $y\geq 0$, $1-e^{-y}\leq y$.

(e) Pour prouver la continuité de f_k en 0, il faut démontrer que $f_k\,(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f_k\,(0)$.

$$f_k\,(0) - f_k\,(x) = \int_0^1 t^k dt - \int_0^1 t^k e^{-tx}dt = \int_0^1 t^k\left(1-e^{-tx}\right)dt$$

Et comme $0\leq 1-e^{-y}\leq y$ pour tout $y\geq 0$ on a alors $0\leq 1-e^{-tx}\leq tx$ pour $t\geq 0$ et $x\geq 0$.
Donc pour $t\geq 0$ et $x\geq 0$ comme $t^k\geq 0$, on a : $0\leq t^k\,(1-e^{-tx})\leq t^{k+1}x$
Et comme $0\leq 1$

$$0\leq \int_0^1 t^k\left(1-e^{-tx}\right)dt \leq \int_0^1 t^{k+1}xdt = x\left[\frac{t^{k+2}}{k+2}\right]_0^1 = \frac{x}{k+2}$$

Donc, par encadrement, $f_k\,(0) - f_k\,(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et f_k est bien continue en 0.

(f) Pour étudier la dérivablilité, on cherche la limite de la dérivée en 0 (méthode hors-programme désormais)

$$f_k'(x) = -f_{k+1}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -f_{k+1}(0) = -\frac{1}{k+2} \quad \text{car } f_{k+1} \text{ est continue en } 0.$$

f_k' est donc prolongeable par continuité en 0.
Cette conclusion est hors-programme : f_k est dérivable en 0 et $f_k'(0) = -\dfrac{1}{k+2}$.

Exercice facultatif.

Pour tout entier n on note f_n la fonction définie sur [0,1] par :

$$f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2}dt - \int_x^1 e^{-nt^2}dt.$$

1. (a) La fonction $t \to e^{nt^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \to \int_0^x e^{nt^2}dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (pour x et $0 \in \mathbb{R}$) La fonction $t \to e^{-nt^2}$ l'est également et les bornes de l'intégrales sont dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc $x \to \int_x^1 e^{-nt^2}dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R} \cap [0,1]= [0,1]$.

   (b) Comme f_n est dérivable sur $[0,1]$, on a pour $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= e^{nx^2} \cdot 1 - e^{n0^2} \cdot 0 - e^{-n1^2} \cdot 0 + e^{nx^2} \cdot 1 \\ &= e^{nx^2} + e^{-nx^2} > 0 \end{aligned}$$

2. L'équation est équivalente à $f_n(x) = 0$.
   Comme f_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$, d'après le théorème de la bijection monotone, f_n est donc bijective de $[0,1]$ dans $[f_n(0), f_n(1)]$.
   Déterminons les signes de $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

$$f_n(0) = \int_0^0 e^{nt^2}dt - \int_0^1 e^{-nt^2}dt = -\int_0^1 e^{-nt^2}dt$$

   et comme $e^{nt^2} \geq 0$ et que $0 \leq 1$ en intégrant l'inégalité, on obtient $f_n(0) \leq 0$ et de la même façon $f_n(1) \geq 0$.
   Donc $0 \in [f_n(0), f_n(1)]$ et l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $[0,1]$. Donc il existe un unique c_n tel que

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2}dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}dt = 0$$

   De plus, c_0 vérifie :

$$\int_0^{c_0} e^{0t^2}dt - \int_{c_0}^1 e^{-0t^2}dt = 0 \Leftrightarrow [t]_0^{c_0} - [t]_{c_0}^1 = 0 \Leftrightarrow 2c_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow c_0 = \frac{1}{2}$$

3. On ne connaît pas c_n mais seulement le fait qu'il soit solution de l'équation. Pour comparer c_n et c_{n+1} on comparera donc leurs images par f_n ou f_{n+1}. Comme $f_n(c_n) = 0$ et $f_{n+1}(c_{n+1}) = 0$, puisque f_{n+1} est croissante sur $[0,1]$, comparons $f_{n+1}(c_n)$ et $f_{n+1}(c_{n+1}) = f_n(c_n)$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(c_n) &= \int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2}dt - \int_{c_n}^1 e^{-(n+1)t^2}dt \\ f_n(c_n) &= \int_0^{c_n} e^{nt^2}dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}dt \end{aligned}$$

   Or comme $n \leq n+1$ et que $t^2 \geq 0$ on a $nt^2 \leq (n+1)t^2$, exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{nt^2} \leq e^{(n+1)t^2}$ comme $0 \leq c_n$ on a

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2}dt \leq \int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2}dt$$

   De même

$$-\int_{c_n}^1 e^{-nt^2}dt \leq -\int_{c_n}^1 e^{-(n+1)t^2}dt$$

   Finalement,

$$f_{n+1}(c_{n+1}) = f_n(c_n) \leq f_{n+1}(c_n)$$

   Comme f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$ et que c_n et c_{n+1} en sont éléments, on a bien $c_{n+1} \leq c_n$.
   Donc la suite (c_n) est décroissante et minorée par 0 (puisque pour tout n, $c_n \in [0,1]$) donc elle converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ par passage à la limite dans les inégalités.

4. (a) On étudie les variations de $g(x) = e^x - x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x+1$ et $e^{nt^2} > nt^2$ d'où, pour $0 \leq r$:

$$\int_0^r e^{nt^2} dt \geq \int_0^r nt^2 dt = n\frac{r^3}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Conclusion : $\boxed{\text{Par minoration, } \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^r e^{nt^2} dt = +\infty.}$

(b) Comme $-nt^2 \leq 0$ et que $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, alors $e^{-nt^2} \leq e^0 = 1$. Comme $c_n \leq 1$, par intégration de l'inégalité on obtient :

$$\int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_{c_n}^1 1 dt = [t]_{c_n}^1 = 1 - c_n \leq 1 \qquad \text{car } c_n \geq 0.$$

(c) Finalement on a

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq 1$$

Raisonnons par l'absurde. On suppose que $\ell > 0$ on a alors pour tout entier n, $c_n \geq \ell$ et donc

$$1 \geq \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_0^{\ell} e^{nt^2} dt + \int_{\ell}^{c_n} e^{nt^2} dt \geq \int_0^{\ell} e^{nt^2} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On obtient donc une contradiction. Comme $\ell \in [0,1]$, on a finalement $\ell = 0$.