DM n°1

Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \ln(x) + x$$

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 1$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

   (a) Montrer que pour tout entier n :

$$u_n \geq 1$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. On suppose à présent que $u_0 = e$
   (a) Montrer que, pour tout entier n :

$$u_{n+1} \geq u_n + 1$$

   (b) En déduire que, pour tout entier n :

$$u_n \geq n + e$$

   (c) Retrouver la limite de la suite (u_n).
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 \in]0, 1[$ et pour tout entier n,

$$v_{n+1} = f(v_n)$$

   (a) Montrer qu'il existe un entier r pour lequel

$$v_r < 0.$$

   (b) En déduire que la suite (v_n) n'est plus défnie à partir du rang $r + 1$.

Exercice facultatif.

Soit f la fonction définie par l'expression

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}.$$

1. Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité

   $$e^x \geq x + 1.$$

   Préciser alors l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Etudier les variations de f sur son ensemble de définition.
4. Pour tout entier naturel n, on pose

   $$u_n = \int_0^n f(x)dx.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n,

   $$u_n = n + \int_0^n \frac{x}{e^x - x}dx.$$

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$
5. Pour tout entier naturel n, on pose maintenant

   $$v_n = \int_0^n \frac{x}{e^x - x}dx.$$

   On étudie dans cette question la convergence de la suite (v_n).

   (a) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

   (b) Montrer, pour tout réel x, l'inégalité

   $$e^x - x \geq \frac{e^x}{2}.$$

   (c) Déduire de l'inégalité précédente, l'inégalité pour tout entier naturel n

   $$v_n \leq \int_0^n 2xe^{-x}dx.$$

   (d) On pose, pour tout réel x,

   $$h(x) = xe^{-x}.$$

   Exprimer $h(x)$ en fonction de e^{-x} et $h'(x)$. Calculer alors pour tout entier naturel n

   $$\int_0^n 2xe^{-x}dx,$$

   (e) Etablir alors que la suite (v_n) est majorée et conclure.