DM n°10

On rappelle que la série géométrique de terme général x^n est convergente pour $x \in]-1;1[$, et que

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

La fonction S ainsi définie sur $]-1,1[$ est de classe C^∞ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S^{(k)}$ est définie sur $]-1,1[$ par

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

1. Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. Soit $p \in]0, \frac{2}{3}[$. Dans un pays, la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants est notée q_n et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$q_n = \frac{1}{2}p^n.$$

De plus, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir une fille (ou un garçon) est $\dfrac{1}{2}$.

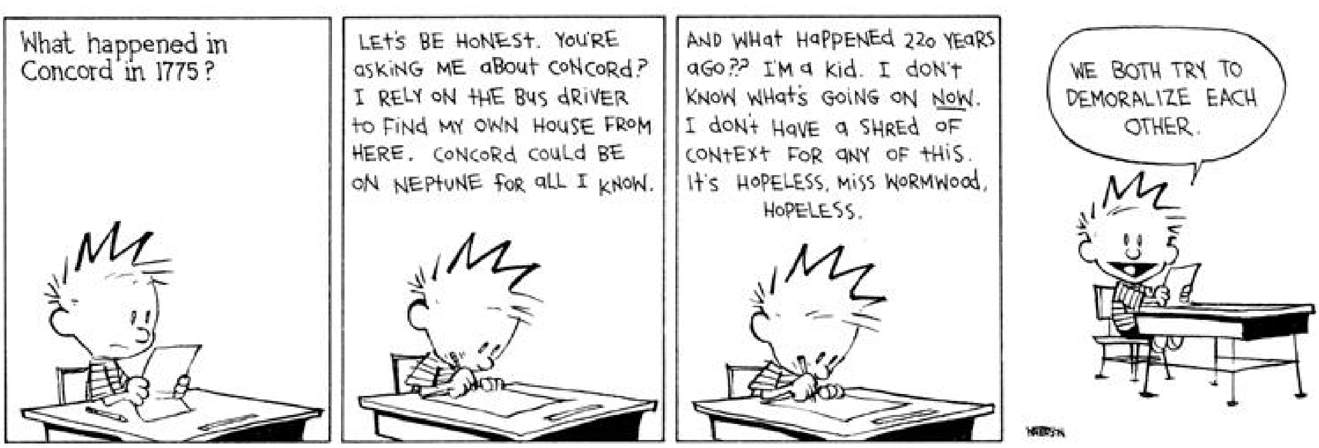
(a) Calculer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant.

(b) Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.

(c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On considère une famille de n enfants ; calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k filles.

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k filles.

(e) Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucune fille.



Exercice facultatif.

Soit p un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}.$$

1. Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ la série de terme général u_n diverge.

   On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+p+2)\, u_{n+2} = (n+2)\, u_{n+1}.$$

   (b) En déduire par récurrence sur n que

$$S_n = \frac{1}{p-1}\left(1 - (n+p+1)\, u_{n+1}\right)$$

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = (n+p)\, u_n.$$

   (a) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

   (b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.

   (c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.

4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.

   (a) Montrer que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$$

   (b) En déduire une contradiction avec la troisième question.

5. Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.