DM n°11

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

   (a) Étudier les variations de la fonction g_0, définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g_0(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

   Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

   (b) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad g_n'(x) \geqslant 0 \quad \iff \quad n \geqslant 2\ln(1+x).$$

   En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.
   Calculer soigneusement $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.

   (c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

   et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n$.

   (d) Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$:

$$g_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt.$$

   (a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

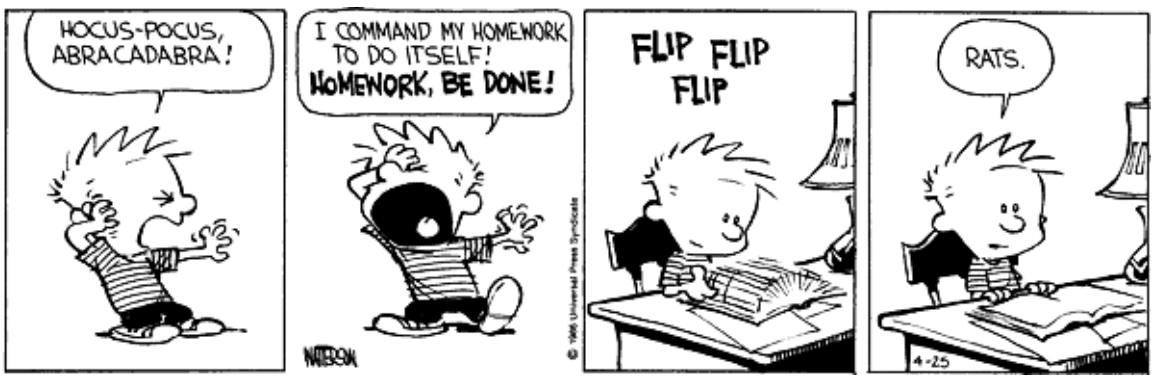
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.

   (c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$$

   (d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.$$



Exercice facultatif.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
2. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ converge, et calculer cette intégrale.
   Indication : on distinguera les cas $x \leq 0$ et $x > 0$.
3. Déterminer un réel positif α tel que
$$\int_0^{\alpha} f(t)dt = \frac{1}{2}.$$
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. On considère la fonction φ_x définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t)dt.$$
   (a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \varphi_x(u)$.
   (b) Montrer que pour $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$, si $u < v$ alors
$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geq \int_{x+u}^{x+v} f(t)dt.$$
   En déduire que φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) On admet que φ_x est continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}_+$.

   On note $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation
$$\varphi_x(u) = \frac{1}{2}.$$
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)dt = \frac{1}{2}.$$
5. (a) Vérifier, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$: $\quad U(x) = 1 - x$.
   (b) Pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, montrer : $\quad \varphi_x(x) \geq \dfrac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geq 0$, et en déduire :
$$U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2.$$
6. (a) Montrer que l'application U est continue sur $[0, +\infty[$.
   (b) Etudier la dérivabilité de U sur $[0, +\infty[$
   (c) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U.
   (d) Tracer l'allure de la courbe représentative de U.
7. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = U(a_n).$$
   (a) Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geq \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$.