DM n°2

Le but de l'exercice est d'étudier et d'approximer la limite de la suite (S_n) définie pour tout n entier $n \geq 2$ par

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. (a) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

   (b) Pour $n \geq 2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

   (c) Montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leq 1.$$

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$S_n \leq 1.$$

   (b) Montrer que (S_n) est croissante.

   (c) En déduire que (S_n) converge. On notera $L = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n$.

3. Pour pour tout entier $m \geq 2$, on note

$$R_m = L - S_m = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (S_n - S_m).$$

   (a) Montrer que pour tout entier m et $n \geq m \geq 2$

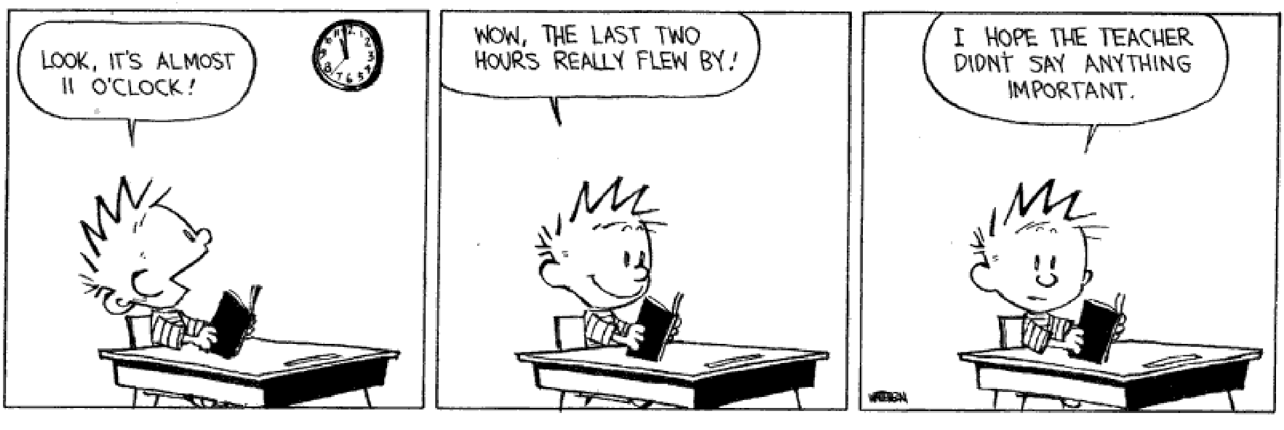
$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{m}$$

   (b) En déduire que pour tout entier $m \geq 2$

$$\frac{1}{m+1} \leq R_m \leq \frac{1}{m}$$

4. Déterminer la plus petite valeur de m telle que

$$0 \leq L - S_m \leq 10^{-2}$$



Exercice facultatif.

On pose

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

1. Convergence de la suite (a_n).
   (a) Calculer a_1 et a_2 (on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).
   (b) Justifier que $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n}$ puis étudier le sens de variation de (a_n).
   (c) En déduire la convergence de la suite (a_n).
2. Calcul de la limite.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x+1) - \ln x)$ puis montrer que
   $$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}.$$
   (b) Comparer les réels suivants
   $$\frac{1}{n+k+1}, \quad \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad \ln(n+k+1) - \ln(n+k).$$
   Comparer alors les sommes suivantes
   $$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k+1}, \quad \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-2} (\ln(n+k+1) - \ln(n+k)).$$
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} (\ln(n+k+1) - \ln(n+k))$.
   (d) Montrer que
   $$a_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k+1}.$$
   (e) Montrer que
   $$a_n - \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k}.$$
   (f) En déduire que
   $$\forall n \geqslant 1, \quad \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n-1} \leqslant a_n \leqslant \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}.$$
   (g) Déterminer la limite de la suite (a_n).