DM n°3

Trois joueurs A, B et C s'affrontent simultanément dans un jeu. Pour chaque manche il n'y a qu'un vainqueur possible.
A et B sont de même niveau et gagnent les manches chacun avec une probabilité de p (avec $0 < p < 1/2$).
Le premier joueur qui gagne deux manches consécutives est déclaré vainqueur de ce jeu.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n ou C_n) l'évènement :

"la $n^{ième}$ manche est gagné par A (resp. B ou C)."

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note GA_n (respectivement GB_n ou GC_n) l'évènement :

"A (resp. B ou C) gagne le match à l'issue de la $n^{ième}$ manche."

1. Quelle est la probabilité de gain de C pour chaque manche ?
2. (a) Quelle est la probabilité pour A, pour B, et pour C de gagner le match à l'issue de la deuxième manche ?
   (b) Quelle est la probabilité que le jeu comporte au moins trois manches ?
   (c) Quelle est la probabilité que A gagne le match à l'issue de la troisième manche ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note JA_n (respectivement JB_n ou JC_n) l'évènement :

   "la $n^{ième}$ manche est gagné par A (resp. B ou C) et le jeu continue."

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note alors

   $$u_n = \mathbb{P}(JA_n), \quad v_n = \mathbb{P}(JB_n) \quad \text{et} \quad w_n = \mathbb{P}(JC_n).$$

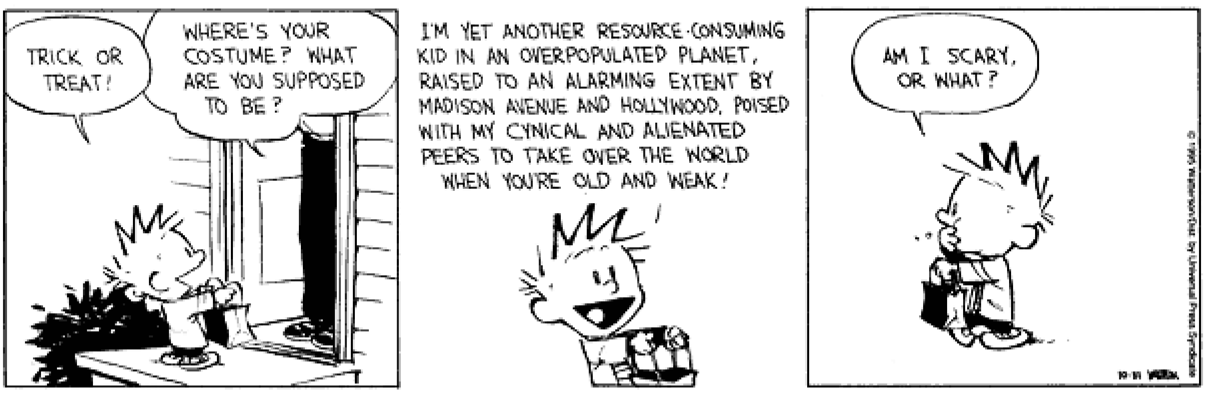
   (a) Calculer u_1, v_1, w_1, u_2, v_2 et w_2.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

   $$\begin{cases} u_{n+1} = p \cdot (v_n + w_n) \\ v_{n+1} = p \cdot (u_n + w_n) \\ w_{n+1} = (1-2p) \cdot (u_n + v_n) \end{cases}$$

   (c) En déduire que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$u_n = v_n.$$

   En déduire w_{n+1} en fonction de u_n.
   (d) Déterminer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n.
4. On suppose dans cette question que l'on a $p = 0,2$
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer u_n en fonction de n.
   (b) En déduire w_n.
   (c) Calculer la probabilité pour que le jeu ne soit pas achevé à l'issue de la $n^{ième}$ manche et calculer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$. Que peut-on en conclure ?



Exercice facultatif.

PARTIE I. Un jeu en ligne.

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

— H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
— V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
— D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
— N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(D)$ des événements H, V, D.
3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à :
$$\mathbb{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048$$
4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
   (a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance.
   Calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$ de Z_i.
   (b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
   (b) Indiquer l'espérance et la variance de X.
   (c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X.
2. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \simeq -0,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$)

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée » et on pose $\mathbb{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_\Delta(H)$, $\mathbb{P}_\Delta(V)$, $\mathbb{P}_\Delta(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ.
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ pour en déduire que la probabilité que les jetons ne soient pas alignés est égal à :
$$\mathbb{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$$
3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance de gain soit strictement positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?