

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}.$$

1. (a) Montrer que f est paire.
- (b) Etudier les variations de f et tracer sa courbe.
- (c) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.
- (d) Justifier que $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$. On donne $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$.
- (e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f'(x)| \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}.$$

- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|.$$

- (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

- (d) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ .
- (e) Ecrire un programme en Python permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.



Exercice facultatif.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1} \quad \text{où } P'_n \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .
3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.
4. (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

- (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geq 0$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n , et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt.$$

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2} (x_n - 1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.