DM n°8

Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$I_n = \int_1^e x^2 \ln(x)^n \, dx.$$

1. Calculer I_1.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in [1, e]$ *et* $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(x)^{n+1} \leq \ln(x)^n.$$

   En déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

   (c) Montrer que pour tout $x \in [1, e]$:

$$0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}.$$

   (d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

3. (a) A l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = \int_0^1 t^n e^{3t} \, dt.$$

   (b) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n \, I_n$.

Exercice facultatif.

On définit la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 2 :

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (a) Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

   (b) On définit la fonction

$$F: \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right). \end{array}$$

   Calculer la dérivée de F, et en déduire une expression de I_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

   (a) Écrire en Python un algorithme calculant la somme S_n, l'entier n étant demandé à l'utilisateur.

   (b) Montrer que :

$$I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

   Indication : écrire $I_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx$.

   (c) Montrer que

$$\frac{S_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$