DM n°9

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt.$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}_+$
   Indication : attention, vous ne pouvez pas dériver f_k pour l'instant.

   (b) Etudier la suite $(f_k(0))_{k\geq 0}$ de nombres réels. En déduire, pour tout nombre réel positif x fixé la limite de la suite $(f_k(x))_{k\geq 0}$.

2. (a) Soit $x > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, établir que

   $$f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}.$$

   (b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2.

   (c) Montrer que

   $$x\, f_0(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   (d) A l'aide de la relation établie au c), montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

   $$\frac{x^{k+1}}{k!}\, f_k(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout réel x strictement positif :

   $$f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du.$$

   (b) En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

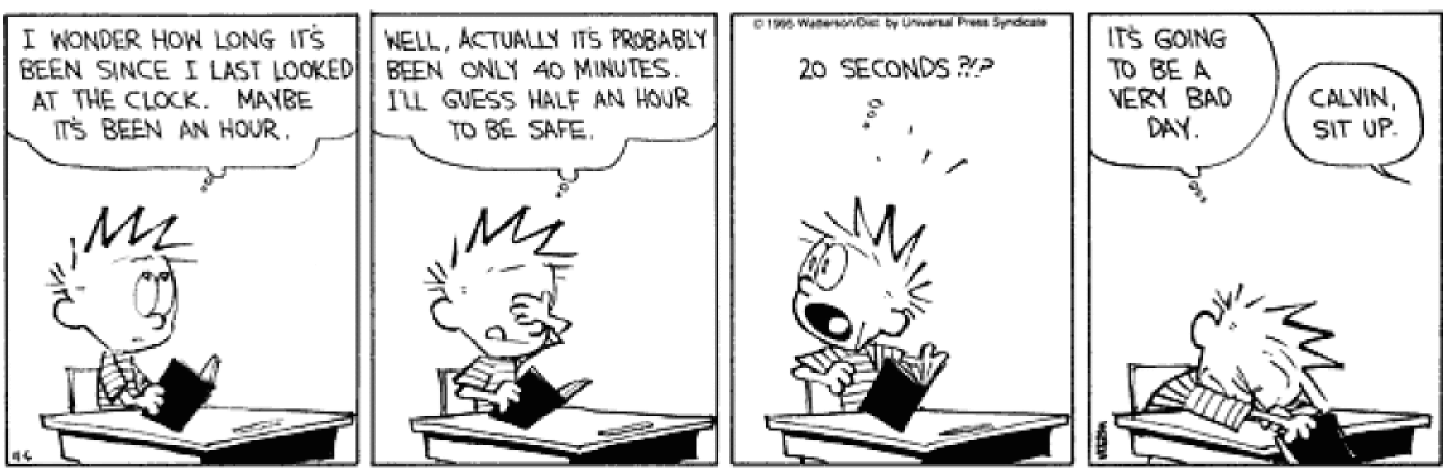
   (c) Trouver une relation simple entre f_k' et f_{k+1}.

   (d) Montrer que pour tout $y \geq 0$,

   $$1 - e^{-y} \leq y.$$

   (e) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_k est continue en 0.

   (f) Déterminer si f_k est dérivable à droite en 0



Exercice facultatif.

Pour tout entier n on note f_n la fonction définie sur [0,1] par :

$$f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2}\,dt - \int_x^1 e^{-nt^2}\,dt.$$

1. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $[0,1]$.
   (b) Étudier le sens de variation de f_n.
2. Montrer qu'il existe un unique réel c_n de $[0,1]$ tel que :

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt$$

   et donner la valeur de c_0.
3. On considère la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ définie à la question précédente ; montrer qu'elle est décroissante et qu'elle converge vers une limite ℓ appartenant à $[0,1]$.
4. (a) Montrer que pour tout nombre réel fixé r de $]0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^r e^{nt^2}\,dt = +\infty$$

   (On pourra prouver que $e^x \geq x$)
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n on a

$$\int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt \leq 1.$$

   (c) En déduire la valeur de ℓ.