

Mathématiques
Devoir surveillé n°2
Octobre 2022

Durée de l'épreuve : 2h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Dans cet exercice, les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Résoudre l'inéquation $|2x + 5| + |3x - 1| > 6$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Soient x et y deux réels tels que $x < y$. On fixe $\varepsilon \in]0, y - x[$. Montrer qu'en prenant $n := \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière), on a l'encadrement $x < n\varepsilon < y$.

Exercice 2.

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{1 + |x|}. \end{aligned}$$

1. Déterminer $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]\right)$.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) \subset]-1, 1[$.
3. Soit $y \in]-1, 1[$. Montrer que s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$, alors

$$|x| = \frac{|y|}{1 - |y|}.$$

4. En déduire que l'application $f: \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$ est bijective et expliciter sa bijection réciproque.
5. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Dresser le tableau de variation complet de f .
7. Dans cette question, on introduit les fonctions

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & h: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 & & & x &\longmapsto f \circ g(x) - g \circ f(x). \end{aligned}$$

- (a) Calculer $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire le signe de h sur $\mathbb{R}$.
- (b) La fonction h est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3.

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ définie sur $]0, +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
2. Etudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in [\sqrt{2}, 2]$.
4. Etudier la monotonie de (u_n) .
5. Justifier que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 4.

Soit n un entier naturel. On se propose dans cet exercice de calculer la somme double

$$S_n := \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (j-i) \binom{j}{i}.$$

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Simplifier (en justifiant) l'écriture de $\sum_{i=0}^j \binom{j}{i}$.
2. Vérifier que pour tout couple $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i \leq j$, on a l'identité

$$i \binom{j}{i} = j \binom{j-1}{i-1}.$$

3. Dédire des deux questions précédentes que $S_n = \sum_{j=0}^n j 2^{j-1}$.
4. Obtenir finalement une expression de S_n en fonction de n qui ne fait pas apparaître le symbole $\sum$. (*Indication* : on pourra considérer la fonction $x \mapsto \sum_{j=0}^n x^j$ et la dériver.)