Mathématiques
Devoir surveillé n°4
Décembre 2022

Durée de l'épreuve : 2h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par
$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$
On se propose de construire la courbe représentative de f.

A. Etude sur $]0,+\infty[$

1. Variations de f
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
   (b) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$ et déterminer son signe.
2. Limites
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f(x) = 1 + \frac{2}{e^{2x}-1}.$$
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
   (c) Déterminer la limite de f en 0^+.
3. En utilisant les résultats précédents, dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$. Déterminer le signe de f sur $]0,+\infty[$.
4. Primitives de f sur $]0,+\infty[$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction g définie par :
   $$g(x) = \ln(e^{2x}-1) - x.$$
   (b) En déduire une primitive de f sur $]0,+\infty[$.
   (c) Déterminer le sens de variation de g et sa limite en 0^+.
   (d) En écrivant $e^{2x}-1 = e^{2x}(1-e^{-2x})$, déterminer la limite de g en $+\infty$.
   (e) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur $]0,+\infty[$.

B. Construction de $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f

1. Montrer que pour tout x non nul, $f(x) + f(-x) = 0$. En déduire les symétries de $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les équations des asymptotes de $\mathcal{C}$.
3. Calculer les valeurs exactes de $f(\ln(3))$ et $f'(\ln(3))$.
4. Construire $\mathcal{C}$ et ses asymptotes. On donne les valeurs approchées :

$\ln(3)$	$5/4$	$9/16$	$9/32$
$1,1$	$1,2$	$0,6$	$0,3$

Exercice 2.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

   (a) Etudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$

   (b) Calculer une équation de la tangente T à C à l'abscisse 0.

   (c) Etudier les positions relatives de C et T. Préciser les points d'intersection.

   (d) Construire C et T.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   (a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$$

   (b) En déduire par récurrence que pour tout entier n,

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   (d) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$$

   (e) En déduire par récurrence et à l'aide du 2.b) que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

3. (a) Montrer que pour tout réel $x \geq 2$,

$$\frac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1)$$

   (b) En déduire que : pour tout entier n,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$$

   puis que : pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$$

   (c) A l'aide des résultats précédents, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} n\, u_n.$$

4. Ecrire un programme Python qui demande à l'utilisateur un entier naturel n et qui affiche la valeur u_n.