Mathématiques
Corrigé du DS n°4

Exercice 1.

A. Etude sur $]0,+\infty[$

1. Variations de f

   (a) f est défine en tout x tel que $e^{2x}-1\neq 0$ ce que l'on résout :

   $$e^{2x}-1\neq 0 \Leftrightarrow e^{2x}\neq 1 \Leftrightarrow 2x\neq 0 \quad \text{car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

   Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$ f est un quotient bien défini de fonctions usuelles dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   (b) Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

   $$f'(x)=\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)-2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=\frac{2\left(e^{4x}-e^{2x}-e^{4x}-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=\frac{-4e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

   et comme un carré est toujours positif et une exponentielle strictement positive, $f'<0$ sur $\mathbb{R}^*$

2. Limites

   (a) On a :

   $$f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\frac{e^{2x}-1+2}{e^{2x}-1}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}-1}+\frac{2}{e^{2x}-1}=1+\frac{2}{e^{2x}-1}$$

   (b) Comme $e^{2x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ on a alors

   $$\frac{2}{e^{2x}-1}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

   ainsi

   $$f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

   (c) On a $e^{2x}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}1^+$ (car exp est continue sur $\mathbb{R}$), $e^{2x}-1\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}0^+$ et $\frac{1}{e^{2x}-1}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}+\infty$ d'où enfin

   $$f(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}+\infty$$

3. On a donc

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1

   f est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

4. Primitives de f sur $]0,+\infty[$

   (a) g est dérivable en tout x tel que $e^{2x}-1>0$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et

   $$g'(x)=\frac{1}{e^{2x}-1}e^{2x}\cdot 2-1=\frac{2e^{2x}-e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=f(x)$$

   (b) Donc g est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

   (c) Comme $g'=f>0$ sur $]0,+\infty[$, g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Comme exp est continue en 0, on a

   $$e^{2x}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}1^+$$

   $e^{2x}-1\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}0^+$ donc

   $$g(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}-\infty.$$

(d) Comme $e^{2x}-1=e^{2x}(1-e^{-2x})$, on a

$$g(x)=\ln\left(e^{2x}(1-e^{-2x})\right)-x=\ln\left(e^{2x}\right)+\ln\left(1-e^{2x}\right)-x$$

donc

$$g(x)=2x-x+\ln\left(1-e-^{2x}\right)=x+\ln\left(1-e^{-2x}\right)$$

On a $e^{-2x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et

$$\ln\left(1-e^{-2x}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

donc

$$g(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

(e) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est strictement positive. Donc d'après le théorème de la bijection monotone, g est bijective de $]0,+\infty[$ dans $]\lim\limits_{x\to0}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)[=]-\infty,+\infty[$. Or $0\in]-\infty,+\infty[$. Donc l'équation $g(x)=0$ a une unique solution dans $]0,+\infty[$.

B. Construction de $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f

1. Soit $x\neq0$, on a

$$\begin{aligned}
f(x)+f(-x) &= \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}+\frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}=\frac{\left(e^{2x}+1\right)\left(e^{-2x}-1\right)+\left(e^{-2x}+1\right)\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{-2x}-1\right)}\\
&= \frac{\left(e^{2x}+1\right)\left(e^{-2x}-1\right)+\left(e^{-2x}+1\right)\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{-2x}-1\right)}\\
&= \frac{e^{2x-2x}-e^{2x}+e^{-2x}-1+e^{-2x+2x}+-e^{-2x}+e^{2x}-1}{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{-2x}-1\right)}\\
&= \frac{e^{0}-1+e^{0}-1}{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{-2x}-1\right)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $f(-x)=-f(x)$ et f est impaire. Donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

2. $\mathcal{C}$ a donc pour asymptote les droites d'équation $x=0$ en 0^+ et en 0^- par symétrie et celles d'équation $y=1$ en $+\infty$ et $y=-1$ en $-\infty$ par symétrie.

3. On a

$$f(\ln(3))=\frac{e^{2\ln(3)}+1}{e^{2\ln(3)}-1}=\frac{3^2+1}{3^2-1}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

De plus,

$$f'(\ln(3))=\frac{-4e^{2\ln(3)}}{\left(e^{2\ln(3)}-1\right)^2}=\frac{-4\cdot3^2}{\left(3^2-1\right)^2}=-\frac{4\cdot3^2}{8^2}=-\frac{9}{16}$$

4. Pour construire $\mathcal{C}$ on place d'abord les asymptotes et la tangente en $\ln(3)$ grâce à la valeur et à la pente (coefficient directeur) de la tangente en ce point.

Exercice 2.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(a) f est dérivable en x tel que $x^2+x+1\neq0$. Or ce polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta=1-4<0$. Donc elle est toujours strictement négative. Donc f est définie, continue, et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)x}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x+1-2x^2-x}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\quad\text{ainsi } f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0 \text{ et } f(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0$$

x	-∞		-1		0		1		+∞
$1-x^2$		−	0	+		+	0	−	
$f'(x)$		−	0	+	1	+	0	−	
$f(x)$	0	↘	−1	↗	0	↗	1/3	↘	0

(b) En 0, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Conclusion : La tangente a donc pour équation $y = x$.

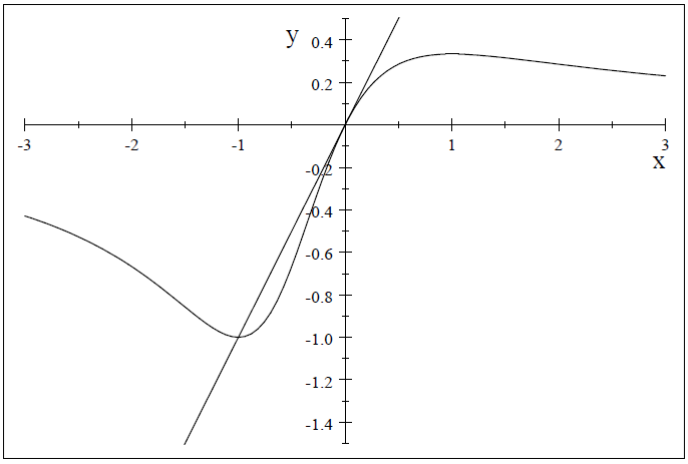
(c) Les positions relatives de C et T sont données par le signe de $f(x) - x$:

$$f(x) - x = \frac{x}{x^2+x+1} - x = \frac{x - x\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1} = \frac{-x^3-x^2}{x^2+x+1} = \frac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$		$-$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$-$	
Position de C et T		C au dessus de T		C en dessous de T		C en dessous de T	

Conclusion : C et T ont deux points d'intersection de coordonnées $(-1,-1)$ et $(0,0)$.

(d) On trace C et T.



2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+1} = \frac{p}{1+p+p^2}$$

Comme $1 + p + p^2 \geq p + p^2 = p(1+p) > 0$, on a

$$\frac{1}{1+p+p^2} \leq \frac{1}{p(p+1)}$$

Conclusion : Ainsi pour $p > 0$, $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{p}{1+p+p^2} \leq \dfrac{1}{p+1}$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$".

Initialisation : $0 < u_0 = 1 \leq \dfrac{1}{0+1}$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, comme f est strictement croissante sur $[0,1]$ et que 0, u_n et $\frac{1}{n+1}$ en sont éléments,

$$f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

De plus, $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+2}$ car $n+1 \geq 1$ on a bien $0 < u_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+2}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout entier n, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

(c) Comme $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, par encadrement

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

3. (a) D'après les variations de f, pour $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$. Et

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{x^2+x+1}{x} = x+1+\frac{1}{x}$$

Donc comme pour tout entier n, $u_n \neq 0$

Conclusion : $\boxed{\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{f(u_n)} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}}$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$\dfrac{1}{u_n} \leq n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$".

Initialisation : $\dfrac{1}{u_1} = u_0 + 1 + \dfrac{1}{u_0} = 1+1+\sum\limits_{k=1}^{1}\dfrac{1}{k}$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$$

or d'après 2.b) $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ et par hypothèse de récurrence $\dfrac{1}{u_n} \leq n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} + 1 + n + 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = n+2+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, on a : pour tout entier } n \geq 1,\ \dfrac{1}{u_n} \leq n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}.}$

4. (a) On calcule la différence pour tout réel $x \geq 2$

$$g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x) + \ln(x-1)$$

g est dérivable sur $[2,+\infty[$ et

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{-x+1-x(x-1)+x^2}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$

donc g est strictement croissante sur $[2,+\infty[$ et comme

$$g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x) + \ln(x-1) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x} + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour } x \geq 2,\ g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x) + \ln(x-1) < 0.}$

(b) On fait alors la somme de ces inégalités pour k de 2 à n :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} &\leq \sum_{k=2}^{n}\ln(k) - \ln(k-1) = \sum_{k=2}^{n}\ln(k) - \sum_{k=2}^{n}\ln(k-1) = \sum_{k=2}^{n}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) \\ &\leq \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)\end{aligned}$$

On reporte dans l'inégalité sur $1/u_n$

$$\frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = n+1+\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq n+2+\ln(n)$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour } n \geq 2,\ \dfrac{1}{u_n} \leq n+2+\ln(n).}$

(c) On a donc pour $n \geq 2$

$$u_n \geq \frac{1}{n+2+\ln(n)} \quad \text{ainsi} \quad n\,u_n \geq \frac{n}{n+2+\ln(n)}$$

d'où l'encadrement :

$$\frac{n}{n+2+\ln(n)} \leq n\,u_n \leq \frac{n}{n+1} \quad \text{car d'après } 2.b) \quad 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{\ln(n)}{n}} \leq n\,u_n \leq \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{\ln(n)}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$, par encadrement,

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = 1.}$

5. On peut proposer le programme suivant

```
n=int(input("entrez la valeur de n :"))
u=1
for k in range(1,n+1):
    u=u/(u^2+u+1)
print("la valeur de un est",u)
```