

Mathématiques
Devoir surveillé n°5
Janvier 2023

Durée de l'épreuve : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On désigne par N un nombre entier supérieur à 1 et par a un nombre réel strictement positif. L'objet du problème est d'étudier la rentabilité d'un investissement en fonction du taux d'intérêt ce qui conduit à l'étude dans les parties II et III des équations suivantes pour $0 < x < 1$:

$$x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0.$$

$$Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0.$$

Dans la partie I, on étudie la première de ces équations dans deux cas particuliers ($N = 2$ et 3).

Partie I

1. Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ ($0 < x < 1$)

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

- (a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle appartenant à $]0, 1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2 .

En déduire que r_2 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $]0, 1[$

- (b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/2, 1]$
(c) Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$:

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$$

- (d) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

i. Montrer que pour tout entier n , $u_n \in [1/2, 1]$

ii. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2|$$

iii. En déduire l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

2. Résolution numérique de l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ ($0 < x < 1$)

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

- (a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle r_3 appartenant à $]0, 1[$.
(b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/3, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/3, 1]$
(c) Calculer les dérivées f' et f'' de f et en déduire le maximum de la valeur absolue de $f'(x)$ pour x appartenant à $[1/3, 1]$
(d) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
Majorer $|u_n - r_3|$ en fonction de n et prouver la convergence de la suite (u_n) vers r_3
(e) Ecrire un programme en *Python* qui donne une valeur approchée de r_3 à 10^{-8} près.

Partie II

1. Etude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a = 0$

On note f_N la fonction polynôme définie par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a$.

- (a) Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive x_N et une seule, puis montrer que celle-ci appartient à $]0, 1[$ lorsque $N > a$
- (b) Montrer, en utilisant le symbole $\sum$, la relation

$$(*) : (x-1)f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$$

2. Racine positive de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a = 0$

- (a) Montrer que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante. En déduire que la suite (x_N) converge vers un nombre x^* appartenant à $[0, 1[$
- (b) Montrer que $0 < x_N \leq x_A$, puis que $0 < (x_N)^N \leq (x_A)^N$ lorsque $N \geq A$ où A est un entier naturel non nul. En choisissant $A \geq a$, en déduire la limite de la suite (x_N^N) lorsque N tend vers $+\infty$, puis, à l'aide de la relation $(*)$, exprimer la limite x^* en fonction de a .

On convient alors de poser $x_N = \frac{a}{a+1}(1 + \varepsilon_N)$, et ε_N tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$

- (c) Etablir à l'aide de la relation $(*)$ l'égalité suivante :

$$(N+1)\varepsilon_N \left[\ln \left(\frac{a}{a+1} \right) + \ln(1 + \varepsilon_N) \right] = \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln(a)$$

En déduire les limites de $(N+1)\varepsilon_N$ et de $(1 + \varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Fonctionnement d'un taux d'intérêt

Si on a un taux d'intérêt des placements égal à $r > 0$, on sait que le placement d'une somme s à l'issue de l'année 0 conduit à une somme $s_1 = (1+r)s$ à l'issue de l'année 1, ..., à une somme $s_n = (1+r)^n s$ à l'issue de l'année $n, \dots$

Investissement

On considère un investissement qui nécessite l'apport initial d'une somme $S_0 > 0$ l'année 0, puis qui rapporte ensuite la même somme $S > 0$ pendant chacune des N années suivantes, c'est à dire pendant les années 1, 2, ..., N . Chaque année, la somme rapportée par l'investissement est directement placée au taux d'intérêt précité.

Valeur présente

Dans ce contexte, on obtiendra une somme S_n à l'issue de l'année n si et seulement si on obtient une somme $S_n/(1+r)^n$ à l'issue de l'année 0 (puisque le placement d'une telle somme $S_n/(1+r)^n$ conduit précisément à l'obtention de la somme S_n à l'issue des n années de placement). Aussi appellera-t-on dans ce contexte *valeur présente* de la somme S_n la somme $S_n/(1+r)^n$.

3. Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

- (a) Montrer que la *valeur présente* (à la fin de l'année 0) de l'investissement décrit ci-dessus est égale, compte tenu de la dépense initiale S_0 et des revenus attendus à :

$$VP(r) = \frac{S}{(1+r)^N} + \frac{S}{(1+r)^{N-1}} + \dots + \frac{S}{(1+r)^2} + \frac{S}{(1+r)} - S_0$$

L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP(r) \geq 0$ est vérifiée, c'est-à-dire s'il est financièrement plus intéressant de réaliser l'investissement projeté que de placer directement la somme S_0 au taux d'intérêt des placements comme on l'a décrit plus haut.

- (b) Montrer que l'équation $VP(r) = 0$ possède une unique racine strictement positive r_N et une seule si $N > S_0/S$, et donner l'expression de celle-ci en fonction de x_N et montrer que l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leq r_N$
- (c) Préciser le sens de variation de la suite (r_N) et sa limite r^* , puis exprimer cette limite r^* en fonction de S et de S_0 .

Partie III

1. Etude de l'équation $Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \dots + 2x^2 + x - a = 0$

On note g_N la fonction polynôme définie par : $g_N(x) = Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \dots + 2x^2 + x - a$.

- (a) Montrer que l'équation $g_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive y_N et une seule, puis montrer que celle-ci appartient $]0, 1[$ lorsque $N(N+1) > 2a$.
- (b) Montrer, en utilisant le symbole $\sum$, la relation

$$(**) : (x-1)^2 g_N(x) = Nx^{N+2} - (N+1)x^{N+1} + x - a(x-1)^2$$

2. Racine positive de l'équation $Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \dots + 2x^2 + x - a = 0$

- (a) Montrer que $g_{N+1}(y_N) > g_N(y_N)$ et en déduire que la suite (y_N) est strictement décroissante.
En déduire que la suite (y_N) converge vers un nombre réel y^* appartenant à $[0, 1[$.
- (b) Montrer que $0 < N y_N^N \leq N y_A^N$ pour $N \geq A$ où A est un nombre entier tel que $A(A+1) > 2a$.
En déduire la limite de la suite $(N y_N^N)$ lorsque N tend vers $+\infty$, et, à l'aide de la relation $(**)$, exprimer la limite y^* en fonction de a .

On modifie les hypothèses précédentes et on suppose désormais que l'investissement considéré, qui nécessite toujours l'apport initial d'une somme S_0 l'année 0, rapporte de plus en plus pendant chacune des N années suivantes, comme suit : une somme S l'année 1, une somme $2S$ l'année 2, une somme $3S$ l'année 3, ..., une somme NS l'année N .

3. Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

- (a) Montrer que la *valeur présente* (à la fin de l'année 0) de l'investissement décrit est égal à :

$$VP(r) = \frac{NS}{(1+r)^N} + \frac{(N-1)S}{(1+r)^{N-1}} + \dots + \frac{2S}{(1+r)^2} + \frac{S}{(1+r)} - S_0$$

L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP(r) \geq 0$ est vérifiée.

- (b) Montrer que l'équation $VP(r) = 0$ possède une racine strictement positive r_N et une seule lorsque $N(N+1) > 2S_0/S$, puis donner l'expression de celle-ci en fonction de y_N et montrer que l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leq r_N$.
- (c) Préciser le sens de variation et la limite de r^* de la suite (r_N) , puis exprimer cette limite r^* en fonction de S et de S_0 .