Mathématiques
Corrigé du DS n°5

On désigne par N un nombre entier supérieur à 1 et par a un nombre réel strictement positif. L'objet du problème est d'étudier la rentabilité d'un investissement en fonction du taux d'intérêt ce qui conduit à l'étude dans les parties II et III des équations suivantes pour $0 < x < 1$:

$$x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0.$$
$$Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0.$$

Dans la partie I, on étudie la première de ces équations dans deux cas particuliers ($N = 2$ et 3).

Partie I

1. **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$

   (a) L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ est du second degré.
   Elle a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et pour racines $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
   La première est strictement négative. Montrons que la seconde se trouve dans $]0, 1[$:
   Comme $9 > 5 > 4$, alors ($x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et 9, 5 et 4 sont positifs) $3 > \sqrt{5} > 2$ donc $2 > -1 + \sqrt{5} > 1$ et finalement $1 > x_2 > 1/2$.
   Donc l'équation a bien une unique racine sur cet intervalle et $r_2 = x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   Or pour $x \neq -1$ on a $f(x) = x \iff \frac{1}{1+x} = x \iff 1 = x^2 + x \iff x^2 + x - 1 = 0$
   Donc l'équation $f(x) = x$ a les mêmes solutions (pour $x \neq -1$) que la précédente.
   Donc r_2 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $]0, 1[$.

   (b) Si $1/2 \leq x \leq 1$ alors $3/2 \leq x + 1 \leq 2$ donc $\dfrac{2}{3} \geq \dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{2}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et que ces éléments en font partie.
   Donc $f(x) \in [1/2, 1]$.

   (c) f est dérivable sur $[1/2, 1]$ et $f'(x) = -1/(1+x)^2 < 0$ et $|f'(x)| = 1/(1+x)^2$
   Si $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$ alors $\dfrac{3}{2} \leq x + 1 \leq 2$ donc $\dfrac{2}{3} \geq \dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{2}$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \geq \left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2 \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que ces éléments en font partie.
   Donc $\boxed{\text{si } x \in [1/2, 1] \text{ alors } |f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}}$

   (d) On considère la suite défnie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

   i. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \in [1/2, 1]$."
   Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 \in [1/2, 1]$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
   Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in [1/2, 1]$, alors, d'après la question précédente, on a $f(u_n) \in [1/2, 1]$.
   Donc $u_{n+1} \in [1/2, 1]$, $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in [1/2, 1]$.

   ii. f est continue sur $[1/2, 1]$ et dérivable sur l'intervalle $]1/2, 1[$. De plus, d'après les précédentes questions, $u_n \in [1/2, 1]$, $r_2 \in [1/2, 1]$ et $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$ pour tout x de $[1/2, 1]$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis

   $$|f(u_n) - f(r_2)| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|, \text{ donc } |u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|$$

   iii. Et on prouve la majoration de la suite par récurrence :
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$|u_n - r_2| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$."
   Initialisation : $u_0 = 1$ et comme $1/2 < r_2 < 1$ alors $0 \leq u_0 - r_2 \leq 1/2 \leq \left(\frac{4}{9}\right)^0$ et donc $|u_0 - r_2| =\leq \left(\frac{4}{9}\right)^0$.
   $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
   Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$ alors en multipliant l'inégalité par $4/9 \geq 0$ on obtient

$$\frac{4}{9}|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$$

$$|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.}$

Comme $|4/9| < 1$ on a $(4/9)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par encadrement $u_n - r_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge bien vers } r_2.}$

2. **Résolution numérique de l'équation** $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$

   (a) Soit $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ sur $]0,1[$.
   g est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ et elle réalise donc une bijection de $]0,1[$ dans $]\lim_{x\to 0} g(x), \lim_{x\to 1} g(x)[=]-1,2[$. D'après le théorème de la bijection, comme $0 \in]-1,2[$, l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a bien une unique solution sur $]0,1[$.

   (b) f est dérivable sur $[0,+\infty[$ (car $x^2 + x + 1 \neq 0$) et $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} < 0$ sur $[0,+\infty[$.

   Donc f est strictement décroissante sur cet intervalle et comme $f(1/3) = \frac{1}{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1} = \frac{9}{13} \leq 1$ et $f(1) = \frac{1}{3}$

   Donc pour tout $x \in [1/3,1]$ on a $f(x) \in [1/3, 9/13]$ et donc $f(x) \in [1/3,1]$

   (c) f' est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned} f"(x) &= -\frac{2\left(x^2+x+1\right)^2 - (2x+1)\,2\left(x^2+x+1\right)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^4} \\ &= -2\frac{\left(x^2+x+1\right) - (2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^3} \\ &= -2\frac{x^2+x+1-4x^2-4x-1}{\left(x^2+x+1\right)^3} \\ &= 2\frac{3x^2+3x}{\left(x^2+x+1\right)^3} \end{aligned}$$

   Donc $f" > 0$ sur $]0,+\infty[$ et f' est strictement croissante et négative sur cet intervalle.
   Donc si $1/3 \leq x \leq 1$ alors

$$0 \geq f'(1) \geq f'(x) \geq f'(1/3) = -135/169$$

   et donc $|f'(x)| \leq 135/169$

   Donc $\boxed{\text{pour } x \in [1/3,1],\ |f'(x)| \leq \frac{135}{169}.}$

   (d)
   - Montrons que $r_3 \in]1/3,1[$.

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1+3+9-27}{27} = -\frac{14}{27} < 0 = g(r_3).$$

     Or g est strictement croissante sur $]0,1[$, ainsi $1/3 < r_3$. De plus, on sait que $r_3 \in]0,1[$, donc $r_3 \in]1/3,1[$.
   - On remarque comme précédement que

$$f(x) = x \Longleftrightarrow 1 = x\left(x^2+x+1\right) \Longleftrightarrow x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$$

     L'équation $f(x) = x$ a donc également r_3 pour unique solution sur $[1/3,1]$.
   - Montrons par récurrence que pour tout $u_n \in [1/3,1]$.
     Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \in [1/3,1]$."
     Initialisation : $u_0 = 1 \in [1/3,1]$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
     Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
     D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in [1/3,1]$ alors d'après la question 2.(b) $f(u_n) = u_{n+1} \in [1/3,1]$
     $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
     Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1/3,1]$.

- f est continue sur $[1/3, 1]$ et dérivable sur l'intervalle $]1/3, 1[$. De plus, d'après les précédentes questions, $u_n \in [1/3, 1]$, $r_3 \in [1/3, 1]$ et $|f'(x)| \leq \dfrac{135}{169}$ pour tout x de $[1/3, 1]$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$|u_{n+1} - r_3| = |f(u_n) - f(r_3)| \leq \frac{135}{169} |u_n - r_3|.$$

- Par récurrence, pour tout entier n : $|u_n - r_3| \leq \left(\dfrac{135}{169}\right)^n |u_0 - r_3|$.
  Et comme $\dfrac{1}{3} < r_3 < u_0 = 1$ alors $0 < u_0 - r_3 > \dfrac{2}{3}$
  Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - r_3| \leq \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{135}{169}\right)^n}$
- Comme $|135/169| < 1$ on a $(135/169)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et par encadrement $u_n - r_3 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge bien vers } r_3.}$

(e) L'écart entre u_n et r_3 est plus petit que $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{135}{169}\right)^n$.

Donc pour avoir une valeur approchée de r_3 à 10^{-8} près, il suffit de donner u_n pour $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{135}{169}\right)^n \leq 10^{-8}$ et donc de calculer les valeurs successives de u_n et de $p = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{135}{169}\right)^n$ jusqu'à ce que la valeur de p soit inférieure à 10^{-8}.

```
u = 1
p = 2/3
while  p > 10^(-8) :
.      p = p * 135/169
.      u = 1/(u^2 + u + 1)
print("u")
```

Partie II

1. **Etude de l'équation** $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$
   On note f_N la fonction polynôme définie par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a$.

   (a) On étudie les variations de f_N sur $\mathbb{R}^+$: f_N est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f_N'(x) = Nx^{N-1} + \cdots + 1 > 0$, de plus $f_N(0) = -a < 0$ et $f_N(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,. Comme f_N est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, f_N est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[-a, +\infty[$.
   Comme $0 \in [a, +\infty[$, d'après le théorème de la bijection l'équation $f_N(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.
   Si $N > a$ alors $f(1) = N - a > 0$, or f_N est strictement croissante, comme $f_N(x_N) = 0 < f_N(1)$ on obtient

$$x_N \in]0, 1[.$$

   (b) Comme $f_N(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} x^k\right) - a$, on a

$$\begin{aligned}
(x-1) f_N(x) &= (x-1)\left(\left(\sum_{k=1}^{N} x^k\right) - a\right) = \left(\sum_{k=1}^{N} x^{k+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{N} x^k\right) - a(x-1) \\
&= \left(\sum_{i=2}^{N+1} x^i\right) - \left(\sum_{k=1}^{N} x^k\right) - a(x-1) \qquad \text{avec le changement d'indice } i = k+1 \\
&= x^{N+1} - x - a(x-1) = x^{N+1} - (a+1)x - 1
\end{aligned}$$

2. **Racine positive de l'équation** $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$

   (a)
   - On calcule $f_{N+1}(x_N) = x_N^{N+1} + x_N^N + \cdots + x_N^2 + x_N - a = f_N(x_N) + x_N^{N+1}$
     Et comme $x_N^{N+1} > 0$ on a bien $\boxed{f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)}$.
   - Comme $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N) = 0 = f_{N+1}(x_{N+1})$, donc $f_{N+1}(x_N) > f_{N+1}(x_{N+1})$ et comme f_{N+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, $x_N > x_{N+1}$. La suite (x_N) est décroissante et minorée par 0 donc $\boxed{\text{la suite } (x_N) \text{ converge vers une limite } x^*.}$

- Comme $x_N > 0$ pour tout entier N, on a par passage à la limite $x^* \geq 0$.
  Soit A un entier $A > a$, comme (x_N) est décroissante, alors pour tout $N > A$, on a $x_N < x_A$ et par passage à la limite $x^* \leq x_A < 1$.
  Donc la suite (x_N) converge vers un nombre $\boxed{x^* \text{ appartenant à } [0,1[.}$

(b) Comme la suite (x_N) est décroissante, si $N \geq A$ alors $0 < x_N \leq x_A$, et comme la fonction puissance $N^{ième}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que x_A et x_N en sont éléments, $0 < (x_N)^N \leq (x_A)^N$.
Soit $A \geq a$, on a alors $0 < x_A < 1$ donc $(x_A)^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par encadrement $x_N{}^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Comme $(x-1) f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$ on a en particulier

$$(x_N - 1) f_N(x_N) = x_N^{N+1} - (a+1)x_N + a = 0.$$

Par passage à la limite dans cette égalité :

$$0 - (a+1)x^* + a = 0$$

Donc, comme $a + 1 \neq 0$, $\boxed{x^* = \frac{a}{a+1}}$

(c) On reprend $x_N^{N+1} - (a+1)x_N + a = 0$ et $x_N = \dfrac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)$
On a donc

$$0 = \left[\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right]^{N+1} - a(1+\varepsilon_N) + a = \left[\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right]^{N+1} - a\varepsilon_N$$

$$a\varepsilon_N = \left[\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right]^{N+1}.$$

Comme tout est strictement positif ($\varepsilon_N > 0$ car $x^* < x_N = x^*(1+\varepsilon_N)$)

$$\ln(a\varepsilon_N) = (N+1)\ln\left(\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right)$$

$$\ln(a) + \ln(\varepsilon_N) = (N+1)\left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right].$$

En multipliant de part et d'autre par ε_N :

$$(N+1)\varepsilon_N\left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right] = \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln(a)$$

Comme $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\varepsilon_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln(a) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De plus, $\ln(1+\varepsilon_N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln\left(\dfrac{a}{a+1}\right) \neq 0$, donc

$$(N+1)\varepsilon_N\left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right] \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\boxed{(N+1)\varepsilon_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$
On a $(1+\varepsilon_N)^{N+1} = e^{(N+1)\ln(1+\varepsilon_N)}$, or

$$\frac{\ln(1+\varepsilon_N)}{\varepsilon_N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc

$$(N+1)\ln(1+\varepsilon_N) = (N+1)\varepsilon_N \frac{\ln(1+\varepsilon_N)}{\varepsilon_N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement, par continuité de la fonction exponentielle en 0, $\boxed{(1+\varepsilon_N)^{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$

3. **Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement**

(a) On calcule la valeur future à l'issue de N années. Les dividendes du placement produisant des intérêts on aura : le dividende S de l'année 1 produit $S(1+r)^{N-1}$ (en $N-1$ années de placement) à l'issue de l'année N le dividende S de l'année 2 produit $S(1+r)^{N-2}$ (en $N-2$ années de placement), ...

Le dividende S de l'année N ne produit pas d'intérêt.

On aura donc au final $S(1+r)^{N-1}+S(1+r)^{N-2}+\cdots+S$ soit une valeur présente (en divisant par $(1+r)^n$) de

$$\frac{S}{(1+r)^N}+\frac{S}{(1+r)^{N-1}}+\cdots+\frac{S}{(1+r)}+\frac{S}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{S}{(1+r)^N}$$

et compte tenu de l'investissement initial, la valeur présente (à la fin de l'année 0) de l'investissement décrit ci-dessus est égale :

$$VP(r)=\frac{S}{(1+r)^N}+\frac{S}{(1+r)^{N-1}}+\cdots+\frac{S}{(1+r)^2}+\frac{S}{(1+r)}-S_0$$

L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP(r)\geq 0$ est vérifiée, c'est-à-dire s'il est financièrement plus intéressant de réaliser l'investissement projeté que de placer la somme S_0 au taux d'intérêt des placements comme on l'a décrit plus haut.

(b) L'équation $VP(r)=0$ s'écrit avec $a=S_0/S$

$$VP(r)=S\left(\left(\frac{1}{1+r}\right)^N+\left(\frac{1}{1+r}\right)^{N-1}+\cdots+\left(\frac{1}{1+r}\right)^2+\frac{1}{(1+r)}-\frac{S_0}{S}\right)=0\iff f_N\left(\frac{1}{1+r}\right)=0 \text{ avec } N>a.$$

Or l'équation $f_N(x)=0$ a une unique solution $x_N\in]0,1[$ donc

$$f_N\left(\frac{1}{1+r}\right)=0\Leftrightarrow x_N=\frac{1}{1+r}\Leftrightarrow r=\frac{1}{x_N}-1>0$$

L'équation a donc pour unique solution $r_N=\dfrac{1}{x_N}-1$.

L'investissement est réalisé si et seulement si $VP(r)>0=VP(r_N)$.

La fonction VP est la composée de $r\mapsto 1/(1+r)$ décroissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et de $S\cdot f_N$ strictement croissante, donc VP est strictement décroissante. On a alors :

$$0=VP(r_N)<VP(r)\iff r<r_N.$$

Remarque : le fait que la *valeur présente* de l'investissement soit décroissante en r rend le placement d'autant plus intéressant que le taux d'intérêt est plus faible.

(c) La suite (x_N) est décroissante et strictement positive, comme $r_N=\dfrac{1}{x_N}-1$, la suite (r_N) est croissante

On a $x_N\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}x^*=\dfrac{a}{a+1}>0$ donc par continuité de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t}-1$ sur $]0,+\infty[$,

$$r_N\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{a+1}{a}-1=\frac{1}{a}=\frac{S_0}{S}=r^*.$$

On a $\boxed{r^*=\dfrac{S_0}{S}.}$

Partie III

1. **Etude de l'équation** $Nx^N+(N-1)x^{N-1}+\cdots+2x^2+x-a=0$

On note g_N la fonction polynôme définie par : $g_N(x)=Nx^N+(N-1)x^{N-1}+\cdots+2x^2+x-a$.

(a) Comme précédemment : $g_N'>0$ sur $\mathbb{R}^+$, $g_N(0)=-a<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g_N(x)=+\infty$ donc par bijection l'équation $g_N(x)=0$ possède une unique racine strictement positive y_N.

Comme $g_N(1)=1+2+\cdots+N-a=N(N+1)/2-a$, si $N(N+1)>2a$ alors $g_N(1)>0=g_N(y_N)$ et comme g_N strictement croissante, on a alors $y_N\in]0,1[$.

(b) On développe

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 g_N(x) &= (x-1)^2 \sum_{k=1}^{N} kx^k - a(x-1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N} kx^{k+2} - 2\sum_{k=1}^{N} kx^{k+1} + \sum_{k=1}^{N} kx^k - a(x-1)^2 \text{ puis on réindexe dans les deux premières sommes} \\
&= \sum_{k=3}^{N+2} (k-2)x^k - 2\sum_{k=2}^{N+1} (k-1)x^k + \sum_{k=1}^{N} kx^k - a(x-1)^2 \\
&= -2\sum_{k=3}^{N+2} x^k + \sum_{k=3}^{N+2} kx^k - 2\sum_{k=2}^{N+1} kx^k + 2\sum_{k=2}^{N+1} x^k + \sum_{k=1}^{N} kx^k - a(x-1)^2.
\end{aligned}$$

Tous les termes communs (de $k=3$ à N) aux sommes se simplifient et il reste :

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 g_N(x) &= -2x^{N+2} + (N+2)x^{N+2} + (N+1)x^{N+1} - 2\left(2x^2 + (N+1)x^{N+1}\right) + 2x^2 + 1x + 2x^2 - a(x-1)^2 \\
&= Nx^{N+2} - (N+1)x^{N+1} + x - a(x-1)^2
\end{aligned}$$

On obtient la relation $(**)$: $(x-1)^2 g_N(x) = Nx^{N+2} - (N+1)x^{N+1} + x - a(x-1)^2$.

2. **Racine positive de l'équation** $Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0$

   (a) Comme précédemment $g_{N+1}(y_N) - g_N(y_N) = (N+1)y_N^{N+1} > 0$ donc $g_{N+1}(y_N) > g_N(y_N)$
   Comme $g_N(y_N) = 0 = g_{N+1}(y_{N+1})$, on a alors $g_{N+1}(y_N) > g_{N+1}(y_{N+1})$ et comme g_N est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ $y_N > y_{N+1}$, donc la suite (y_N) est strictement décroissante et minorée par 0.
   Donc $\boxed{\text{la suite } (y_N) \text{ converge.}}$
   Si $N \geq A(A+1) > 2a$, alors $0 < y_N \leq y_A < 1$ et ainsi $y^* \in [0,1[$.

   (b) Pour $N \geq A$ comme la suite (y_N) est décroissante, et que la fonction puissance N est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a comme précédemment
   $$0 < N\, {y_N}^N \leq N\, {y_A}^N.$$
   Et pour A tel que $A(A+1) > 2a$ on a $0 < y_A < 1$ et $N\, {y_A}^N \to 0$ (car $\alpha^N \underset{+\infty}{=} o(1/N)$ si $|\alpha| < 1$).
   Et par encadrement $N\, {y_N}^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ${y_N}^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ également.
   D'après la relation $(**)$en y_N, on a
   $$0 = N\, {y_N}^{N+2} - (N+1)\, {y_N}^{N+1} + y_N - a(y_N - 1)^2$$
   et par passage à la limite $0 = y^* - a(y^*-1)^2$.
   On résout donc l'équation du second degré :
   $$ay^2 - (2a+1)y + a = 0,$$
   dont le discriminant est $\Delta = (2a+1)^2 - 4a^2 = 4a+1 > 0$ et les racines sont $\frac{1}{2a}\left(2a+1-\sqrt{4a+1}\right)$ et $\frac{1}{2a}\left(2a+1+\sqrt{4a+1}\right) > 1 + \frac{1}{2a} > 1$
   or comme $y^* \in [0,1[$,
   $$\boxed{y^* = \frac{1}{2a}\left(2a+1-\sqrt{4a+1}\right)}.$$

On modifie les hypothèses précédentes et on suppose désormais que l'investissement considéré, qui nécessite toujours l'apport initial d'une somme S_0 l'année 0, rapporte de plus en plus pendant chacune des N années suivantes, comme suit : une somme S l'année 1, une somme $2S$ l'année 2, une somme $3S$ l'année 3,... , une somme NS l'année N.

3. **Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement**

   (a) Comme précédemment
   $$VP(r) = \frac{NS}{(1+r)^N} + \frac{(N-1)S}{(1+r)^{N-1}} + \cdots + \frac{2S}{(1+r)^2} + \frac{S}{(1+r)} - S_0.$$

   L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP(r) \geq 0$ est vérifiée.

(b) Comme précédemment $VP(r) = 0 \Leftrightarrow g_N\left(\frac{1}{1+r}\right) = 0$ avec $a = S_0/S$ possède une racine strictement positive r_N et une seule lorsque $N(N+1) > 2S_0/S$, et $r_N = \frac{1}{y_N} - 1$ et pour les mêmes raisons de sens de variation l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leq r_N$.

(c) Comme précédemment la suite (y_N) est décroissante et positive et $r_N = \frac{1}{y_N} - 1$, donc la suite (r_N) est croissante et par passage à la limite avec $a = S_0/S$

$$
\begin{aligned}
r^* &= \frac{1}{y^*} - 1 = \frac{2a}{2a+1-\sqrt{4a+1}} - 1 \\
&= \frac{\sqrt{4a+1}-1}{2a+1-\sqrt{4a+1}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{4a+1}-1\right)\left(2a+1-\sqrt{4a+1}\right)}{\left(2a+1-\sqrt{4a+1}\right)\left(2a+1+\sqrt{4a+1}\right)} \\
&= \frac{-6a+2(a+1)\sqrt{4a+1}}{4a^2} \\
&= \frac{1}{a}\left(-\frac{3}{2}+(a+1)\sqrt{1+\frac{1}{2a}}\right)
\end{aligned}
$$