Mathématiques
Devoir surveillé n°6
Mars 2023

Durée de l'épreuve : 2h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Tous les théorèmes et les propriétés doivent être énoncés avec leurs hypothèses précises.

Résultats de base

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, rappeler les résultats suivants

   a) $\forall q \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=2}^{n} q^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} k$

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, rappeler les résultats suivants

   a) $\sin(a + b)$ b) $\sin^2(a)$ c) $\cos(a)\cos(b)$

Analyse

3. Donner la définition avec des quantificateurs de " $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$".
4. Donner la définition des suites adjacentes, puis donner les propriétés des suites adjacentes.
5. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
6. Donner la définition d'une asymptote oblique à la courbe d'une fonction f au voisinage de $+\infty$.
7. Enoncer le théorème des accroissements finis.

Polynômes

8. Soit P un polynôme, donner deux propositions équivalentes à "x_0 est racine d'ordre n de P".
9. Donner la définition de $\mathbb{R}_n[X]$.
10. Énoncer le théorème de la division euclidienne des polynômes.

Probabilités finies

11. Donner la définition d'un système complet d'événements.
12. Donner la formule des probabilités totales.
13. Soient X une variable aléatoire finie et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application, énoncer le théorème de transfert.
14. Définir la loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.

Algèbre linéaire

15. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, donner la condition pour que AB existe.
    Dans ce cas $C = AB$ et on pose $C = (c_{i,j})$, préciser la valeur de $c_{i,j}$ et pour quels i et j.
16. Soient $n \geq 2$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.
    (a) Si A est symétrique, alors A est diagonale.
    (b) Si A et B sont inversibles, alors $A + B$ est inversible.
    (c) Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible.
17. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner deux propositions équivalentes à "A est inversible".
18. Soit E un espace vectoriel, rappeler les points à démontrer pour que F soit un sous espace vectoriel de E.
19. Soit $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E, donner les définitions suivantes (avec des quantificateurs) :
    (a) La famille est libre,
    (b) La famille est génératrice de E,
    (c) La famille est une base de E.
20. Donner une base de chacun des espaces vectoriels ci-dessous (sans justification, les calculs peuvent être faits au brouillon) :
    (a) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 0 \\ 6x + 4y & = & 0 \end{array} \right. \right\}$.
    (b) $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } -x + 3y - 2z = 0 \right\}$.

Exercice 2.

Soit $a \in]0,1[$, on définit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

Dans cet exercice, on cherche à résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation suivante d'inconnue Z

$$Z^2 = A \qquad (1)$$

1. Dans cette question, on suppose que $a = \dfrac{5}{8}$ et donc

$$A = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$$

   (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^2 puis P^4.

   (b) Montrer que P est inversible et trouver sa matrice inverse.

   (c) Déterminer la matrice $D = P^{-1}\,A\,P$.

2. On se place désormais dans le cas général où $a \in]0,1[$, ainsi

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}.$$

   Déterminer la matrice $D_a = P^{-1}\,A\,P$ où P est la matrice précédente.

3. On définit $Y = P^{-1}\,Z\,P$.

   (a) Montrer que l'équation (1) équivaut à

$$Y^2 = D_a \qquad (2)$$

   (b) On cherche à résoudre l'équation (2) en prenant Y sous la forme générale : $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

      i. Ecrire le système de quatre équations *à* quatre inconnues x, y, z et t qui est équivalent *à* l'équation (2)

      ii. Montrer qu'aucune solution de (2) ne vérifie $x + t = 0$.

      iii. Pour $a \in]0,1[$, résoudre ce système et donner toutes les solutions de l'équation (2) suivant la valeur de a.

   (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation (1) suivant la valeur de a.

   (d) Donner les quatre solutions de l'équation (1) dans le cas où $a = 5/8$.

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 x e^{-x^2}(1-x)^n dx.$$

1. (a) Former le tableau de variations sur $[0,1]$ de $f : x \mapsto x e^{-x^2}$.

   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}$$

   (c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}$$

   (b) Etudier la convergence des suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\,I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.