Mathématiques
Corrigé du DS n°6

Exercice 1.

Tous les théorèmes et les propriétés doivent être énoncés avec leurs hypothèses précises.

Résultats de base

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, rappeler les résultats suivants

   a) $\forall q \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=2}^{n} q^k = \begin{cases} q^2 \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} - 3$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, rappeler les résultats suivants

   a) $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ b) $\sin^2(a) = 2\sin(a)\cos(a)$ c) $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$

Analyse

3. Donner la définition avec des quantificateurs de " $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$".

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

4. Donner la définition des suites adjacentes, puis donner les propriétés des suites adjacentes.
   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :
   — $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   — $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
   — $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.
   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ et les deux suites tendent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.
5. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
   L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, c'est-à-dire, si f est continue sur le segment $[a,b]$, alors, pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.
6. Donner la définition d'une asymptote oblique à la courbe d'une fonction f au voisinage de $+\infty$.
   Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$, alors on dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
7. Enoncer le théorème des accroissements finis.
   Soit f une fonction définie sur $[a,b]$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que
   $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Polynômes

8. Soit P un polynôme, donner deux propositions équivalentes à "x_0 est racine d'ordre n de P".
   "x_0 est racine d'ordre n de P" est équivalent à "$(X-x_0)^n$ divise P mais $(X-x_0)^{n+1}$ ne divise pas P".
   C'est également équivalent à "$\forall k \in [\![0, n-1]\!], P^{(k)}(x_0) = 0$ et $P^{(n)}(x_0) \neq 0$."
9. Donner la définition de $\mathbb{R}_n[X]$.
   $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
10. Énoncer le théorème de la division euclidienne des polynômes.
    Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tel que :
    $$A = BQ + R \quad \text{avec } deg(R) < deg(B).$$

Probabilités finies

11. Donner la définition d'un système complet d'événements.
    Une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements est un système complet d'événements si les A_i sont deux à deux incompatibles et leur réunion fait Ω.

12. Donner la formule des probabilités totales.
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements, alors pour tout événement B, on a
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap B).$$

13. Soient X une variable aléatoire finie et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application, énoncer le théorème de transfert.
L'espérance de $g(X)$ est donnée par
$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\,\mathbb{P}(X = x).$$

14. Définir la loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.
$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
On notera $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
$$E(X) = np \quad \text{et } V(X) = np(1-p).$$

Algèbre linéaire

15. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, donner la condition pour que AB existe.
Dans ce cas $C = AB$ et on pose $C = (c_{i,j})$, préciser la valeur de $c_{i,j}$ et pour quels i et j.
AB existe si et seulement si $p = q$. On a alors
$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, r]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

16. Soient $n \geq 2$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.
    (a) Si A est symétrique, alors A est diagonale.
    Faux. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique mais n'est pas diagonale. (La réciproque est vraie)
    (b) Si A et B sont inversibles, alors $A + B$ est inversible.
    Faux. Par exemple, si $A = I_n$ et $B = -I_n$ alors A et B sont inversibles mais pas $A + B = 0_n$.
    (c) Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible.
    Vrai. L'inverse est $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, car $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = AA^{-1} = I_n$.

17. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner deux propositions équivalentes à "A est inversible".
"A est inversible" est équivalent à "$\exists! B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A\,B = B\,A = I_n$".
C'est aussi équivalent à "Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0$ est un système de Cramer".

18. Soit E un espace vectoriel, rappeler les points à démontrer pour que F soit un sous espace vectoriel de E.
— $F \subset E$
— $0_E \in F$ (ou $F \neq \emptyset$)
— $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$. (stabilité par combinaison linéaire)

19. Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E, donner les définitions suivantes (avec des quantificateurs) :
    (a) La famille est libre,
    Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
    $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = 0.$$
    (b) La famille est génératrice de E,
    $$\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n) = E.$$
    (c) La famille est une base de E.
    $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base d'un espace vectoriel E si elle est libre et génératrice de E.

20. Donner une base de chacun des espaces vectoriels ci-dessous (sans justification, les calculs peuvent être faits au brouillon) :

   (a) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{lcl} 3x+2y & = & 0 \\ 6x+4y & = & 0 \end{array} \right. \right\}$.

   $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_1.

   (b) $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } -x+3y-2z=0 \right\}$.

   $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_1.

Exercice 2.

1. (a) On a

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = (P^2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_2$$

Comme $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $1 \times 1 - (-1) \times 1 = 2 \neq 0$, alors P est inversible et d'après la formule de Cramer

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}.A.P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/8 & 8/8 \\ -2/8 & 8/8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D est donc une matrice diagonale.

2. On a

$$\begin{aligned} D_a &= P^{-1}.A.P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-1 & 1 \\ 1-2a & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4a-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D_a est donc une matrice diagonale.

3. Soit $Y = P^{-1}.Z.P$.

   (a) Comme P est inversible, on a les équivalences suivantes

$$Z^2 = A \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}Z^2 = P^{-1}A \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}Z^2P = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}ZP{\cdot}P^{-1}ZP = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad Y^2 = D_a$$

   (b) Soit $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

   i. L'équation (2) est donc équivalente à

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ zx+tz & yz+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2+yz=2a-1 \\ zx+tz=0 \\ xy+yt=0 \\ yz+t^2=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2+yz=2a-1 \\ z\,(x+t)=0 \\ y\,(x+t)=0 \\ yz+t^2=1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

   ii. On raisonne par l'absurde : on suppose que $x+t=0$.

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x^2+yz=2a-1 \\ yz+t^2=1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x^2+yz=2a-1 \\ yz+x^2=1 \quad \text{car } x=-t \end{array} \right.$$

   On obtient donc que $2a-1=1$, ainsi $a=1$ Or $0<a<1$, on obtient donc une contradiction. On en conclut que $x+t=0$ est impossible. Donc $x+t \neq 0$.

iii. Comme $x+t\neq 0$,

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} x^2+yz=2a-1 \\ z=0 \\ y=0 \\ yz+t^2=1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} x^2=2a-1 \\ z=0 \\ y=0 \\ t^2=1 \end{array}\right.$$

— Si $2a-1<0$ i.e. $a<1/2$, il n'y a pas de solution.
— si $2a-1=0$ i.e. $a=1/2$ il y a deux solutions : $(x,y,z,t)=(0,0,0,1)$ et $(0,0,0,-1)$
— et si $a>1/2$, i ly a 4 solutions $(x,y,z,t)=\left(\sqrt{2a-1},0,0,1\right)$, $\left(-\sqrt{2a-1},0,0,1\right)$, $\left(\sqrt{2a-1},0,0,-1\right)$ et enfin $\left(-\sqrt{2a-1},0,0,-1\right)$

(c) On rappelle que

$$Y=P^{-1}.Z.P \quad \Leftrightarrow \quad Z=P.Y.P^{-1}.$$

Ainsi, à des valeurs différentes de Y correspondront des valeurs distinctes de Z. De plus,

$$Y \text{ solution de } (2) \quad \Leftrightarrow \quad Z \text{ solution de } (1)\,.$$

Il y aura 0, 2 ou 4 solutions à (1) suivant que $a<1/2$, $a=1/2$ ou $a>1/2$.

(d) Avec $a=5/8>1/2$, ainsi il y aura 4 solutions. On a $\sqrt{2a-1}=1/2$ et les solutions sont avec $x=\pm 1/2$ et $t=\pm 1$

$$Z=P\,Y\,P^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -x \\ t & t \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+t & -x+t \\ -x+t & x+t \end{pmatrix}$$

Les solutions de (1) sont donc

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \text{ ou } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \text{ ou } -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Soit $n\in\mathbb{N}$, on note :

$$I_n=\int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n=\int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n dx.$$

1. (a) Soit $f(x)=xe^{-x^2}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$$

x	0		$1/\sqrt{2}$		1
$1-2x^2$ poly		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
xe^{-x^2}	0	$\nearrow$	$1/\sqrt{2e}$	$\searrow$	$1/e$

(b) On a d'après les variations, pour tout x de $[0,1]$

$$0\leq xe^{-x^2}\leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

Comme sur $[0,1]$ on a $1-x\geq 0$ on a alors pour tout x de

$$[0,1]:0\leq xe^{-x^2}(1-x)^n\leq \frac{(1-x)^n}{\sqrt{2e}}$$

Enfin comme $0\leq 1$, on peut intégrer l'inégalité :

$$0\leq \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n dx\leq \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{2e}}dx=\frac{1}{\sqrt{2e}}\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^1$$

donc

$$0\leq J_n\leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}$$

(c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}\to 0$, par encadrement on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n=0$.

2. (a) On a $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx$. On effectue une intégration par parties. Soit $u(x) = e^{-x^2}$ et $v'(x) = (1-x)^n$ et $u'(x) = -2xe^{-x^2}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}$ avec u et v de classe C^1. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx &= \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}e^{-x^2}\right]_{x=0}^1 - \int_0^1 -2xe^{-x^2} \times -\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}dx \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^{n+1}dx \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+1}\end{aligned}$$

(b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} \to 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. De plus,

$$nI_n = n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+1}\right) = \frac{n}{n}\left(\frac{1}{1+1/n} - \frac{2}{1+1/n}J_{n+1}\right)$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,I_n = 1$.