Mathématiques
Devoir surveillé n°7
Avril 2023

Durée de l'épreuve : 2h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

On note $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]1,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geq 3$:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k)$

3. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$$

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

(c) Établir que

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4. En utilisant le résultat de la question 2., montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
5. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}$$

(b) Ecrire un programme *Python* qui détermine une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.
2. (a) Déterminer le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.
   (b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que
   $$f'(0) = \frac{1}{2}.$$
   (c) En déduire le développement limité à l'ordre 1 de $f(x)$ au voisinage de 0.
   (d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
   (b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.
   (c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variations.
4. (a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que
   $$f(u_n) = n.$$
   Donner la valeur de u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge et que
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$