Mathématiques
Corrigé du DS n°7

Exercice 1.

On note $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]1,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

1. f est dérivable en x tel que $x > 0$ et $x\ln(x) \neq 0$ donc sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Sur $]1,+\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{(x\ln(x))^2} > 0 \qquad \text{car } \ln(x) > \ln(1)$$

donc $f' < 0$ et f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.
En $+\infty$: $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)} \to 0$ et on a une asymptote horizontale.
En 1^+ : $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)} \to +\infty$ et on a une asymptote verticale.

2. Pour $k \geq 3$ on a $k-1 \geq 2 > 1$ donc f est strictement décroissante sur $[k-1,k]$ ainsi

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$$

donc pour tout $x \in [k-1,k]$

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\,dt \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dt = f(k-1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$

3. (a) Pour $n \geq 3$, on somme alors ces inégalités de 3 à n.

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$$

On a alors

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) = \left(\sum_{k=2}^{n} f(k)\right) - f(2).$$

D'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{2}^{n} f(x)\,dx$$

Après changement d'indice, on obtient

$$\sum_{k=3}^{n} f(k-1) = \sum_{k=2}^{n-1} f(k) = \left(\sum_{k=2}^{n} f(k)\right) - f(n)$$

d'où finalement pour tout entier $n \geq 3$ (vrai égalment pour $n = 2$), donc pour $n \geq 2$

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_{2}^{n} f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$$

(b) On calcule

$$\int_{2}^{n} f(x)\,dx = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

d'où les deux inégalités :

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

(c) En divisant de part et d'autre par $\ln(\ln(n)) > 0$ on obtient :

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)\ln(\ln(n))}$$

et par encadrement

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$$

Donc

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4. Pour montrer que ces suites sont adjacentes, il faut montrer que l'iune est décroissante, l'autre croissante et la différence tend vers 0 :
   — On a
   $$v_n - u_n = S_n - \ln(\ln(n)) - S_n + \ln(\ln(n+1)) = \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)$$
   de plus
   $$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
   alors
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$$
   donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.
   — Pour la suite u :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \ln(\ln(n+2)) - S_n + \ln(\ln(n+1)) \\ &= f(n+1) - [\ln(\ln(x))]_{n+1}^{n+2} = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx \geq 0 \end{aligned}$$
   d'après la question 2 pour $k = n+2$, la suite u est croissante.
   — Pour la suite v :
   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{n+1} - \ln(\ln(n+1)) - S_n + \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - [\ln(\ln(x))]_{n}^{n+1} = f(n+1) - \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq 0 \end{aligned}$$
   la suite v est décroissante.

   On en conclut que les suites u et v sont donc bien adjacentes et ont une limite commune ℓ.

5. (a) Comme la suite v est décroissante et u croissante, on a pour tout $n \geq 2$
   $$u_n \leq \ell \leq v_n.$$
   En retranchant v_n on obtient pour tout $n \geq 2$
   $$u_n - v_n \leq \ell - v_n \leq 0$$
   Ainsi en multipliant par -1
   $$0 \leq v_n - \ell \leq v_n - u_n$$
   De plus,
   $$v_n - u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$
   d'après la question 2 pour $k = n+1$ on a
   $$v_n - u_n \leq f(n)$$
   $$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}$$

(b) Ppour avoir une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près, il suffit de donner v_n pour $\frac{1}{n\ln(n)} \leq 10^{-2}$.
from math import
$n = 1$
$S = 0$
$while \quad 1/(n * log(n)) > 10 * *(-2)$:
. $\quad n = n+1$
. $\quad S = S + 1/(n * log(n))$
$print(S - log(log(n)))$

Exercice 2.

1. En $x \in]-\infty, 1[$ et $x \neq 0$, on a $1 - x > 0$, de plus

$$\ln(1-x) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Donc f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ comme quotient et composée de fonctions continues.
En 0 : on sait que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ et

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \underset{0}{\sim} \frac{-x}{-x(1-x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 = f(0)$ et f est continue en 0.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur }]-\infty, 1[}$

2. (a) On a

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$$

. Si x est au voisinage de 0, $-x$ l'est également, ce qui nous permet d'écrire

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{1}{2}(-x)^2 + o\left((-x)^2\right)$$

Conclusion : $\boxed{\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)}$

(b) Le taux d'accroissement en 0 est :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} - 1}{x} \\
&= \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)} \\
&\underset{0}{=} \frac{-x - (1-x)\left[-x - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right]}{x(1-x)\left[-x + o(x)\right]} \\
&\underset{0}{=} \frac{x^2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) + o\left(x^2\right)}{x^2(1-x)\left[-1 + o(1)\right]} \\
&\underset{0}{=} \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{(1-x)\left[-1 + o(1)\right]} \\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = \frac{1}{2}}$

(c) D'après la formule de Taylor-Young, on obtient

$$f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x).$$

(d) L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 est $y = 1 + \dfrac{1}{2}x$.

3. (a) Sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, on a $1 - x > 0$ donc $x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables et comme $(1-x)\ln(1-x) \neq 0$ alors f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-(1-x)\ln(1-x) + x\left[-\ln(1-x) - 1\right]}{\left[(1-x)\ln(1-x)\right]^2} \\
&= \frac{-(1-x)\ln(1-x) - x\ln(1-x) - x}{\left[(1-x)\ln(1-x)\right]^2} \\
&= \frac{-\ln(1-x) - x}{\left[(1-x)\ln(1-x)\right]^2}
\end{aligned}$$

(b) Soit $g(x) = \ln(1-x) + x$ pour tout $x < 1$.
g est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-1}{1-x} + 1 \\ &= \frac{-x}{1-x} \end{aligned}$$

$g'(x)$ est donc du signe de $-x$,

x		0		1
$g'(x)$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donc g est négative sur $]-\infty, 1[$. De plus, $f'(x)$ est du signe opposé de celui de $g(x)$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$

(c) En $-\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{-x}{-x(1-1/x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{1}{(1-1/x)\ln(1-x)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

En 1^- : soit $h = 1 - x \to 0^+$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{1-h}{h\ln(h)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{par croissance comparée.} \end{aligned}$$

d'où

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	$1/2$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) f est continue et strictement croissante sur $[0, 1[$, donc d'après le théorème de la bijection monotone f est donc bijective de $[0, 1[$ dans $\left[f(0), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\right[= [1, +\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n \in [1, +\infty[$.
Conclusion : $\boxed{\text{Donc l'équation } f(x) = n \text{ a une unique solution } u_n \text{ dans } [0,1[}$
Et comme $f(0) = 1$, on a donc
Conclusion : $\boxed{u_1 = 0}$

(b) La réciproque de f sur $[0, 1[$ est continue et a pour variations (par symétrie) :

x	1		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	$\nearrow$	1

et comme $u_n = f^{-1}(n)$ alors
Conclusion : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$