Mathématiques
Devoir surveillé n°8
Mai 2023

Durée de l'épreuve : 2h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Tous les théorèmes et les propriétés doivent être énoncés avec leurs hypothèses précises.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Énoncer la formule d'intégration par parties.
3. Énoncer la formule de Leibniz.
4. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
5. Donner la formule des probabilités totales (dans le cas infini).
6. Soient X une variable aléatoire discrète infinie et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application, énoncer le théorème de transfert.
7. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, donner la condition pour que AB existe.
   Dans ce cas $C = AB$ et on pose $C = (c_{i,j})$, préciser la valeur de $c_{i,j}$ et pour quels i et j.

Exercice 2.

On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.
2. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose que cette fonction est dérivable au point 1, elle vérifie donc :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

(a) Établir pour tout $x \in [0,1[$ l'égalité :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right).$$

(b) En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ est croissante sur $[0,1[$ et qu'elle vérifie pour tout $x \in [0,1[$:

$$0 \leqslant \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leqslant f'(1).$$

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel N non nul, on a :

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} n a_n \leqslant f'(1).$$

En déduire que la série de terme général $n a_n$ est convergente.

(b) À l'aide des résultats des questions 2.(a) et 3.(a), montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$0 \leqslant \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leqslant f'(1)$$

(c) En déduire que

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n.$$

Exercice 3.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul,

$$\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X > j-1) - \mathbb{P}(X > j).$$

   (b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}(X = j) = \left(\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j)\right) - p\,\mathbb{P}(X > p).$$

2. (a) On suppose que X admet une espérance $E(X) = \mu$.

   i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$.

   ii. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = 0.$$

   iii. En déduire que

$$\lim_{p\to+\infty} p\,\mathbb{P}(X > p) = 0.$$

   iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(X > j)$ converge.

   v. Montrer que

$$\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j).$$

   (b) On suppose que $\sum_{j\geq 0} \mathbb{P}(X > j)$ converge.

   i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geq 1}$ définie par

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j).$$

   ii. Comparer $\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X = j)$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j)$.

   iii. En déduire que X admet une espérance.

   (c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X > j)$ converge.

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait

$$\mathbb{P}(X > j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}. \qquad (*)$$

   (a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

   (b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul

$$\mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right).$$

   (d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0, 1]$.

   ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul,

$$\mathbb{P}(X = j) \leq \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}.$$

   (e) Montrer, en utilisant le résultat de (c), que

$$\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}(X = j) = \alpha.$$

   (f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.