Mathématiques

Corrigé du DS n°8

Exercice 1.

Tous les théorèmes et les propriétés doivent être énoncés avec leurs hypothèses précises.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
   Soit f une fonction définie sur $[a,b]$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que
   $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

2. Énoncer la formule d'intégration par parties.
   Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a,b]$, on a
   $$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt$$

3. Énoncer la formule de Leibniz.
   Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et g deux fonctions de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors $fg \in C^n(I)$ et
   $$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\,g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\,g^{(k)}(x).$$

4. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
   Soient $n \in \mathbb{N}$, et f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors il existe $M \geq 0$ tel que pour $x \in I$ et $x_0 \in I$:
   $$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \right| \leq \frac{M\,|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

5. Donner la formule des probabilités totales (dans le cas infini).
   Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements, alors pour tout événement B, on a
   $$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_k \cap B\right).$$

6. Soient X une variable aléatoire <u>discrète infinie</u> et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application, énoncer le théorème de transfert.
   On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}^*\}$. On a
   $g(X)$ admet une espérance si et seulement, si $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} g(x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i)$ converge absolument.
   Dans ce cas, l'espérance de $g(X)$ est donnée par
   $$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i).$$

7. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, donner la condition pour que AB existe.
   Dans ce cas $C = AB$ et on pose $C = (c_{i,j})$, préciser la valeur de $c_{i,j}$ et pour quels i et j.
   AB existe si et seulement si $p = q$. On a alors
   $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Exercice 2.

1. On a pour $x \in [0,1]$ et $n \geqslant 1$,
$$|a_n x^n| = |a_n|\,|x|^n = a_n\,|x|^n \leqslant a_n.$$
La série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ étant convergente, on en déduit d'après le critère de comparaison par inégalité que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est absolument convergente donc convergente.

2. (a) En remarquant que pour $x \neq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}.$$
On a, pour tout réel $x \in [0,1[$, l'égalité :
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{1-x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right) = \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(1-x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\frac{1-x^n}{1-x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right).$$

(b) Soient x et y deux réels appartenant à $[0,1[$ tels que $0 \leqslant x \leqslant y$. Pour tout entier $k \geqslant 1$,
$$0 \leqslant x^k \leqslant y^k.$$
Ainsi, en sommant sur k variant de 0 à $n-1$ ($n \geqslant 1$) et utilisant la positivité des a_n, on obtient :
$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} y^k \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \leqslant a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} y^k\right).$$
En sommant sur tous les entiers n non nuls, on en déduit l'inégalité
$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} y^k\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leqslant \frac{f(y)-f(1)}{y-1}.$$
Ce qui démontre que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ est croissante sur $[0,1[$ et positive. En faisant tendre y vers 1^- dans cette inégalité et laissant fixe x, on obtient que
$$\forall x \in [0,1[, \quad \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leqslant f'(1).$$

3. (a) Soit N un entier naturel non nul. Lorsque $x \in [0,1[$, tous les réels $a_n x^n$ sont positifs, ce qui nous donne l'encadrement
$$\forall x \in [0,1[, \quad \forall N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)$$
donc d'après la question 2.a)
$$\forall x \in [0,1[, \quad \forall N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \leqslant \frac{f(x)-f(1)}{x-1}. \tag{1}$$
La somme $\sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)$ est un polynôme en x donc la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)$ est continue en 1 et
$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = \sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1^k\right) = \sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right) = \sum_{n=1}^{N} n a_n.$$
D'autre part, on dispose de l'égalité $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$. En passant à la limite lorsque x tend vers 1^- dans l'inégalité (1), on obtient pour tout entier N non nul
$$\sum_{n=1}^{N} n a_n \leqslant f'(1),$$
La suite $(S_N)_{N\geqslant 1}$ définie par $S_N = \sum_{n=1}^{N} n a_n$ est majorée par $f'(1)$ et croissante car
$$S_{N+1} - S_N = (N+1)a_{N+1} \geqslant 0,$$

donc $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge vers une limite L inférieure ou égale à $f'(1)$. Par définition de la convergence d'une série, la série $\sum_{n\geqslant 0} na_n$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n = L \leqslant f'(1). \tag{2}$$

(b) Pour tout réel x appartenant à $[0,1[$ et pour tout entier n non nul, on a la majoration

$$a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \leqslant a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1^k\right) = a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right) = na_n$$

En sommant sur $n\in\mathbb{N}^*$, on obtient la majoration

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} na_n.$$

En utilisant les questions 2.(a) et 3.(a) on a alors

$$\forall x\in[0,1[,\quad 0\leqslant \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leqslant f'(1).$$

(c) En faisant tendre x vers 1^-, on obtient par encadrement

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n.$$

Exercice 3.

1. (a) Décomposons l'événement $[X > j-1]$ en union de 2 événements incompatibles :

$$[X>j-1] = [X=j]\cup[X>j]$$

(car les valeurs strictement supérieures $j-1$ sont la valeur j et les valeurs strictement supérieures à j). Ainsi,

$$\mathbb{P}(X>j-1) = \mathbb{P}(X=j) + \mathbb{P}(X>j) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X=j) = \mathbb{P}(X>j-1) - \mathbb{P}(X>j)$$

(b) Soit p un entier naturel non nul,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j) &= \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X>j-1) - \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X>j) && \text{(d'après 1. puis linéarité de la somme)}\\
&= \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)\mathbb{P}(X>k) - \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X>j) && \text{(en posant le changement d'indice } k=j-1\text{)}\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} k\mathbb{P}(X>k) + \sum_{k=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>k) - \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X>j) && \text{(linéarité de la somme)}\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} k\mathbb{P}(X>k) - \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X>j) + \sum_{k=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>k)\\
&= 0 + \sum_{k=1}^{p-1} k\mathbb{P}(X>k) - \sum_{j=1}^{p-1} j\mathbb{P}(X>j) - p\mathbb{P}(X>p) + \sum_{k=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>k)\\
&= -p\mathbb{P}(X>p) + \sum_{k=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>k)
\end{aligned}$$

2. (a) i. X admet une espérance donc d'après la définition de l'espérance, $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument donc converge.

ii. On a

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=1}^{p} k\mathbb{P}(X=k) = E(X) - \sum_{k=1}^{p} k\mathbb{P}(X=k) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} E(X)-E(X) = 0$$

iii. On a

$$\begin{aligned} p\mathbb{P}(X>p) &= p\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=p+1}^{+\infty}[X=k]\right) \\ &= p\sum_{k=p+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) \qquad \text{(union d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\ &= \sum_{k=p+1}^{+\infty}p\mathbb{P}(X=k) \qquad \text{(linéarité)} \end{aligned}$$

or si $k\in [\![p+1,+\infty[\![$ alors $p\leq k$ donc $p\mathbb{P}(X=k)\leq k\mathbb{P}(X=k)$ (car $\mathbb{P}(X=k)\geq 0$), ainsi

$$p\mathbb{P}(X>p) \quad\leq\quad \sum_{k=p+1}^{+\infty}k\mathbb{P}(X=k) \qquad \text{(sommation d'inégalité)}$$

iv. D'après 1.(b), on a :

$$\sum_{j=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>j)=\sum_{j=1}^{p}j\mathbb{P}(X=j)+p\mathbb{P}(X>p)$$

qui admet donc bien une limite lorsque p tend vers $+\infty$ comme somme de deux suites convergentes d'après 2.(a)i. et 2.(a) iii.

v. On fait tendre p vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>j)=\sum_{j=1}^{+\infty}j\mathbb{P}(X=j)+\lim_{p\to+\infty}p\mathbb{P}(X>p)=\mu+0=\mu$$

(b) i. On a

$$v_{p+1}-v_p=\sum_{j=0}^{p}\mathbb{P}(X>j)-\sum_{j=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>j)=\sum_{j=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>j)+\mathbb{P}(X>p)-\sum_{j=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>j)=\mathbb{P}(X>p)\geq 0$$

La suite (v_p) est croissante (donc admet une limite finie ou tend vers $+\infty$).

ii. D'après la question 1.(b), on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p}j\mathbb{P}(X=j) &\leq v_p \qquad \text{(car } p\mathbb{P}(X>p)\geq 0\text{)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>j) \qquad \text{(car } (v_p) \text{ est croissante donc sous sa limite)} \end{aligned}$$

iii. La série de terme général $j\mathbb{P}(X=j)$ est croissante (en tant que série à terme général positif) et majorée d'après la question 2.(b)ii. donc elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone. Elle est donc aussi absolument convergente car à termes positifs.
Par définition de l'espérance, X admet bien une espérance.

(c) D'après la question 2.(a), si X admet une espérance alors la série de terme général $\mathbb{P}(X>j)$ converge. D'après la question 2.(b), la réciproque est vraie. Ainsi, les propriétés sont bien équivalentes.

3. (a) D'après la question 1.(a), on a pour tout $j\geq 1$:

$$\mathbb{P}(X=j)=\mathbb{P}(X>j-1)-\mathbb{P}(X>j)=\frac{1}{j^\alpha}-\frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

Ainsi,

- $\forall j\in\mathbb{N}^*$, $j^\alpha\leq(j+1)^\alpha$ (croissance de $x\mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$) $\Rightarrow \frac{1}{j^\alpha}\geq\frac{1}{(j+1)^\alpha}$ (décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$) , donc

$$\mathbb{P}(X=j)\geq 0.$$

- Pour $N\geq 1$, on a par télescopage

$$\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{j^\alpha}-\frac{1}{(j+1)^\alpha}\right)=1-\frac{1}{(N+1)^\alpha}.$$

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=j) = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{(N+1)^\alpha} = 1$$

On définit donc bien une loi de probabilité.

(b) D'après la question 2.(c), on sait que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X>j)$ converge. Or

$$\mathbb{P}(X>j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{j^\alpha}.$$

On reconnait le terme général d'une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha > 1$. Donc d'après le critère de comparaison par équivalence, X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.

(c) $\forall j \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X=j) = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha}\right) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{\left(j(1+\frac{1}{j})\right)^\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{j^\alpha(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

(d) i. f est définie (car $1+x>0$ sur $[0,1]$) et dérivable sur $[0,1]$ comme composée et somme de fonctions usuelles dérivables sur $[0,1]$. $\forall x \in [0,1]$,

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha = \alpha\left[\frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1\right] = \alpha\frac{1-(1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}.$$

Ainsi, comme $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$, $f'(x)$ est du signe de $1-(1+x)^{\alpha+1} \leq 0$ car $1+x \geq 1$ donc

$$(1+x)^{\alpha+1} \leq 1^{\alpha+1} = 1.$$

f est donc décroissante sur $[0,1]$.

ii. On sait par décroissance de f que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leq f(0) = 0$. On pose alors $x = \dfrac{1}{j} \in [0,1]$ car $j \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{j} \leq 1$. on obtient :

$$1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} - \alpha\frac{1}{j} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{j}$$

Ainsi, d'après 3.(c),

$$\frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha}\right) \leq \frac{1}{j^\alpha}\frac{\alpha}{j} = \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$$

(e) On remarque que $x = \frac{1}{j} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi, comme $(1+x)^{-\alpha} \underset{0}{=} 1 - \alpha x + o\left(x\right)$ on a :

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} = \left(1+\frac{1}{j}\right)^{-\alpha} \underset{+\infty}{=} 1 - \alpha\frac{1}{j} + o\left(\frac{1}{j}\right)$$

donc

$$j^{\alpha+1}\mathbb{P}(X=j) \underset{+\infty}{=} \frac{j^{\alpha+1}}{j^\alpha}\left(1 - 1 + \alpha\frac{1}{j} + o\left(\frac{1}{j}\right)\right) \underset{+\infty}{=} j\left(\alpha\frac{1}{j} + o\left(\frac{1}{j}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \alpha + o\left(1\right) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

(f) D'après la question précédente, comme $\alpha > 0$, on obtient

$$j^{\alpha+1}\mathbb{P}(X=j) \underset{+\infty}{\sim} \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X=j) \underset{+\infty}{\sim} \alpha\frac{1}{j^{\alpha+1}} \quad \Leftrightarrow \quad j^2\mathbb{P}(X=j) \underset{+\infty}{\sim} \alpha\frac{1}{j^{\alpha-1}}.$$

On reconnait le terme général d'une série de Riemann convergente si et seulement si $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$.
Ainsi X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, si et seulement si la série de terme général $j^2\mathbb{P}(X=j)$ converge absolument, si et seulement si $\alpha > 2$ d'après le critère de comparaison avec la série de Riemann ci-dessus.