

Corrigé du DM n°1

Soit f définie par : $f(x) = x \cdot \ln(1+x)$ pour $x > -1$.

1. (a) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

f' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{2+x}{(1+x)^2}$$

- (b) On a le tableau de variations suivant

x	0	$+\infty$
$2+x$	+	
$(1+x)^2$	+	
$f''(x)$	+	
$f'(x)$	↗	
	0	+

f est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle tend vers 0 en 0 et vers $+\infty$ en $+\infty$

2. On factorise $f(x) - x = x \cdot (\ln(1+x) - 1)$.

x	0	$e-1$
$\ln(1+x) - 1$	-	0
$f(x) - x$	0	-

3. Pour la courbe de f , il faut respecter la position par rapport à $y = x$ et placer les tangentes en 0 : $f'(0) = 0$ et en $e-1$: $f'(e-1) = 2 + 1/e$.

4. On suppose dans cette question que $u_0 \in]e-1, +\infty[$.

- (a) Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ ".

Initialisation : Comme $e-1 < u_0$ donc d'après la question précédente, $f(u_0) - u_0 > 0$ ainsi $0 < u_0 < u_1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et comme par hypothèse de récurrence $0 < u_n \leq u_{n+1}$, ils en sont éléments donc $f(0) < f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ donc $0 < u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq u_{n+1}$.

- (b) On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. La suite est croissante donc comme elle est majorée, d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente. Soit ℓ sa limite. Comme pour tout entier n , $u_n > 0$ alors $\ell \geq 0$. f est continue sur $[0, +\infty[$ donc elle est continue en ℓ et

$$f(\ell) = \ell.$$

Donc $\ell = 0$ ou $\ell = e-1$.

- (c) Raisonnons par l'absurde. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. La suite u est croissante, on a pour tout entier n , $u_n \geq u_0$ et donc par passage à la limite, on obtient

$$\ell \geq u_0 > e-1.$$

On aboutit à une contradiction.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas être majorée. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et non majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, elle tend vers $+\infty$.

5. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0, e-1[$

- (a) Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " $0 < u_n < e-1$ ".

Initialisation : On a $0 < u_0 < e-1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et 0, u_n et $e-1$ en sont éléments. Donc $f(0) < f(u_n) < f(e-1)$ et $0 < u_{n+1} < e-1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < e-1$.

- (b) Sur l'intervalle $]0, e - 1[$, on a $f(x) < x$. Comme $u_n \in]0, e - 1[$ on a $f(u_n) < u_n$ donc $u_{n+1} < u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente. Et sa limite ℓ vérifie $0 \leq \ell \leq u_0$ car pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq u_0$. Comme f est continue en ℓ et $f(\ell) = \ell$. Donc $\ell = 0$ ou $\ell = e - 1$. Mais comme $\ell \leq u_0 < e - 1$, on a $\ell \neq e - 1$ et donc $\ell = 0$.
Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice facultatif.

Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \ln(x) + x$$

1. (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ donc

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

- (b) On a $f(x) - x = \ln(x)$ donc

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		-	+

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 1$ et pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " $u_n > 1$."

Initialisation : $u_0 > 1$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence $u_n > 1$, comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors

$$f(u_n) > f(1)$$

Donc $u_{n+1} > 1$, car $f(1) = 1$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

- (b) Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \ln(u_n) + u_n > \ln(1) + u_n = u_n.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

- (c) On raisonne par l'absurde, on suppose que la suite (u_n) est majorée.

Puisque (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers une limite $\ell \geq u_0 > 1$.

Comme f est continue sur $[1, +\infty[$, par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on a

$$f(\ell) = \ell$$

or

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow f(\ell) - \ell = 0 \Leftrightarrow \ln(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = 1$$

Or $\ell > 1$, on obtient ainsi une contradiction.

Conclusion : (u_n) n'est pas majorée.

- (d) La suite (u_n) étant croissante, elle tend donc vers $+\infty$.

3. On suppose à présent que $u_0 = e$

- (a) (Une récurrence est ici inutile.)

Comme $u_0 = e > 1$, alors d'après la question 2.(a), $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 1$. De plus, $f(x) > x$ pour $x > 1$, alors

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n$$

La suite (u_n) est donc croissante et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n \geq u_0 = e$$

et donc

$$\ln(u_n) \geq 1$$

Conclusion : $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \ln(u_n) \geq u_n + 1$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " $u_n \geq n + e$."

Initialisation : $u_0 > e$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence $u_n \geq n + e$, alors d'après le résultat précédent

$$u_{n+1} \geq u_n + 1 \geq n + e + 1$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geq n + e.}$

(c) Puisque $n + e \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on obtient par minoration,

Conclusion : $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.}$

4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 \in]0, 1[$ et pour tout entier n ,

$$v_{n+1} = f(v_n)$$

(a) On raisonne par l'absurde, on suppose que pour tout entier n , $v_n > 0$.

- Montrons par récurrence que pour tout entier n , $0 < v_n < 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " $0 < v_n < 1$."

Initialisation : $0 < v_0 < 1$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence $0 < v_n < 1$, comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors

$$f(v_n) < f(1)$$

Comme $f(1) = 1$, alors $v_{n+1} < 1$.

De plus, on a supposé que pour tout entier k , $v_k > 0$, alors $v_{n+1} > 0$.

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < 1.}$

- Comme $f(x) < x$ si $x \in]0, 1[$, alors $v_{n+1} = f(v_n) < v_n$.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$

- Donc la suite (v_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite ℓ qui vérifie $0 \leq \ell \leq v_0$.

— Si $\ell \neq 0$, alors f continue en ℓ et donc $f(\ell) = \ell$ et la seule solution est $\ell = 1$.

Ce qui est faux car $\ell \leq v_0 < 1$.

— Donc $\ell = 0$. Mais alors comme $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ alors

$$v_{n+1} = f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

On obtient alors $\ell = -\infty$. Ce qui est en contradiction avec $\ell = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{La supposition de départ est fausse : il existe un entier } r \text{ tel que } v_r \leq 0.}$

(b) La suite (v_n) n'est alors plus définie à partir de l'indice $r+1$ puisque f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.