Corrigé du DM n°11

On rappelle que la série géométrique de terme général x^n est convergente pour $x \in]-1;1[$, et que

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

La fonction S ainsi définie sur $]-1,1[$ est de classe C^∞ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S^{(k)}$ est définie sur $]-1,1[$ par

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

1. On a $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ donc

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{S^{(k)}(x)}{k!}x^k = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}x^n = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

2. Soit $p \in]0, \frac{2}{3}[$. Dans un pays, la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants est notée q_n et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$q_n = \frac{1}{2}p^n.$$

De plus, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir une fille (ou un garçon) est $\dfrac{1}{2}$.

(a) On considère les événements

$A =$"une famille a au moins un enfant" et $B_n =$"une famille a n enfants".

On a alors

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

Par union disjointe, on a

$$q = \mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}p^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-p} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{p}{1-p}$$

(b) On a alors

$$q_0 = \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{2}\frac{p}{1-p} = \frac{1}{2}\frac{2-3p}{1-p}.$$

(c) On note Y le nombre de filles d'une famille.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une famille de n enfants, Y compte alors le nombre de succès (avoir une fille) en n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc Y suit une loi binomiale de paramètres $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
Si $k \in [\![0, n]\!]$, la probabilité que cette famille ait k filles est donc

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}_{B_n}(Y = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k, \\ \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } n \geq k \end{cases}}$.

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{B_n}(Y = k)\,\mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=0}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{B_n}(Y = k)\,\mathbb{P}(B_n)$$

et comme $n \geqslant k \geqslant 1$ et $\left|\dfrac{p}{2}\right| < 1$ les probabilités sont données par :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2}p^n = \frac{1}{2}\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{p}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^k}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1}} = \frac{p^k}{(2-p)^{k+1}}.$$

(e) On sépare $n = 0$ des autres termes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{B_n}(Y=0)\,\mathbb{P}(B_n) \\
&= \mathbb{P}_{B_0}(Y=0)\,\mathbb{P}(B_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{B_n}(Y=0)\,\mathbb{P}(B_n) \\
&= 1 \cdot q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2} p^n \\
&= q_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \\
&= q_0 + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{p}{2}} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2-3p}{1-p} + \frac{2}{2-p} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{4-7p+2p^2}{(2-p)(1-p)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{2}\frac{4-7p+2p^2}{(2-p)(1-p)}}$

Exercice facultatif.

1. (a) Décomposons l'événement $[X > j-1]$ en union de 2 événements incompatibles :

$$[X > j-1] = [X = j] \cup [X > j]$$

(car les valeurs strictement supérieures $j-1$ sont la valeur j et les valeurs strictement supérieures à j). Ainsi,

$$\mathbb{P}(X > j-1) = \mathbb{P}(X = j) + \mathbb{P}(X > j) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X > j-1) - \mathbb{P}(X > j)$$

(b) Soit p un entier naturel non nul,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j) &= \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X > j-1) - \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X > j) && \text{(d'après 1. puis linéarité de la somme)} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} (k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X > j) && \text{(en posant le changement d'indice } k = j-1 \text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} k\mathbb{P}(X > k) + \sum_{k=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > k) - \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X > j) && \text{(linéarité de la somme)} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} k\mathbb{P}(X > k) - \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X > j) + \sum_{k=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > k) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{p-1} k\mathbb{P}(X > k) - \sum_{j=1}^{p-1} j\mathbb{P}(X > j) - p\mathbb{P}(X > p) + \sum_{k=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > k) \\
&= -p\mathbb{P}(X > p) + \sum_{k=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > k)
\end{aligned}$$

2. (a) i. X admet une espérance donc d'après la définition de l'espérance, $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument donc converge.

ii. On a

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=1}^{p} k\mathbb{P}(X=k) = E(X) - \sum_{k=1}^{p} k\mathbb{P}(X=k) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} E(X) - E(X) = 0$$

iii. On a

$$\begin{aligned}
p\mathbb{P}(X>p) &= p\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=p+1}^{+\infty}[X=k]\right)\\
&= p\sum_{k=p+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) \qquad \text{(union d'événements 2 à 2 incompatibles)}\\
&= \sum_{k=p+1}^{+\infty}p\mathbb{P}(X=k) \qquad \text{(linéarité)}
\end{aligned}$$

or si $k\in[\![p+1,+\infty[\![$ alors $p\leq k$ donc $p\mathbb{P}(X=k)\leq k\mathbb{P}(X=k)$ (car $\mathbb{P}(X=k)\geq 0$), ainsi

$$p\mathbb{P}(X>p) \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty}k\mathbb{P}(X=k) \qquad \text{(sommation d'inégalité)}$$

iv. D'après 1.(b), on a :

$$\sum_{j=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>j)=\sum_{j=1}^{p}j\mathbb{P}(X=j)+p\mathbb{P}(X>p)$$

qui admet donc bien une limite lorsque p tend vers $+\infty$ comme somme de deux suites convergentes d'après 2.(a)i. et 2.(a) iii.

v. On fait tendre p vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>j)=\sum_{j=1}^{+\infty}j\mathbb{P}(X=j)+\lim_{p\to+\infty}p\mathbb{P}(X>p)=\mu+0=\mu$$

(b) i. On a

$$v_{p+1}-v_p=\sum_{j=0}^{p}\mathbb{P}(X>j)-\sum_{j=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>j)=\sum_{j=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>j)+\mathbb{P}(X>p)-\sum_{j=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>j)=\mathbb{P}(X>p)\geq 0$$

La suite (v_p) est croissante (donc admet une limite finie ou tend vers $+\infty$).

ii. D'après la question 1.(b), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p}j\mathbb{P}(X=j) &\leq v_p \qquad \text{(car } p\mathbb{P}(X>p)\geq 0\text{)}\\
&\leq \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>j) \qquad \text{(car } (v_p) \text{ est croissante donc sous sa limite)}
\end{aligned}$$

iii. La série de terme général $j\mathbb{P}(X=j)$ est croissante (en tant que série à terme général positif) et majorée d'après la question 2.(b)ii. donc elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone. Elle est donc aussi absolument convergente car à termes positifs.
Par définition de l'espérance, X admet bien une espérance.

(c) D'après la question 2.(a), si X admet une espérance alors la série de terme général $\mathbb{P}(X>j)$ converge. D'après la question 2.(b), la réciproque est vraie. Ainsi, les propriétés sont bien équivalentes.

3. (a) D'après la question 1.(a), on a pour tout $j\geq 1$:

$$\mathbb{P}(X=j)=\mathbb{P}(X>j-1)-\mathbb{P}(X>j)=\frac{1}{j^\alpha}-\frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

Ainsi,

- $\forall j\in\mathbb{N}^*$, $j^\alpha\leq(j+1)^\alpha$ (croissance de $x\mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$) $\Rightarrow \frac{1}{j^\alpha}\geq\frac{1}{(j+1)^\alpha}$ (décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$) , donc
$$\mathbb{P}(X=j)\geq 0.$$
- Pour $N\geq 1$, on a par télescopage
$$\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{j^\alpha}-\frac{1}{(j+1)^\alpha}\right)=1-\frac{1}{(N+1)^\alpha}.$$

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=j) = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{(N+1)^\alpha} = 1$$

On définit donc bien une loi de probabilité.

(b) D'après la question 2.(c), on sait que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X > j)$ converge. Or

$$\mathbb{P}(X>j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{j^\alpha}.$$

On reconnait le terme général d'une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha > 1$. Donc d'après le critère de comparaison par équivalence, X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.

(c) $\forall j \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X=j) = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha}\right) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{\left(j(1+\frac{1}{j})\right)^\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{j^\alpha(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

(d) i. f est définie (car $1+x>0$ sur $[0,1]$) et dérivable sur $[0,1]$ comme composée et somme de fonctions usuelles dérivables sur $[0,1]$. $\forall x \in [0,1]$,

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha = \alpha\left[\frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1\right] = \alpha\frac{1-(1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}.$$

Ainsi, comme $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$, $f'(x)$ est du signe de $1-(1+x)^{\alpha+1} \leq 0$ car $1+x \geq 1$ donc

$$(1+x)^{\alpha+1} \leq 1^{\alpha+1} = 1.$$

f est donc décroissante sur $[0,1]$.

ii. On sait par décroissance de f que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leq f(0) = 0$. On pose alors $x = \dfrac{1}{j} \in [0,1]$ car $j \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{j} \leq 1$. on obtient :

$$1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} - \alpha\frac{1}{j} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{j}$$

Ainsi, d'après 3.(c),

$$\frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha}\right) \leq \frac{1}{j^\alpha}\frac{\alpha}{j} = \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$$

(e) On remarque que $x = \frac{1}{j} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi, comme $(1+x)^{-\alpha} \underset{0}{=} 1 - \alpha x + o(x)$ on a :

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} = \left(1+\frac{1}{j}\right)^{-\alpha} \underset{+\infty}{=} 1 - \alpha\frac{1}{j} + o\left(\frac{1}{j}\right)$$

donc

$$j^{\alpha+1}\mathbb{P}(X=j) \underset{+\infty}{=} \frac{j^{\alpha+1}}{j^\alpha}\left(1 - 1 + \alpha\frac{1}{j} + o\left(\frac{1}{j}\right)\right) \underset{+\infty}{=} j\left(\alpha\frac{1}{j} + o\left(\frac{1}{j}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \alpha + o(1) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

(f) D'après la question précédente, comme $\alpha > 0$, on obtient

$$j^{\alpha+1}\mathbb{P}(X=j) \underset{+\infty}{\sim} \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X=j) \underset{+\infty}{\sim} \alpha\frac{1}{j^{\alpha+1}} \quad \Leftrightarrow \quad j^2\mathbb{P}(X=j) \underset{+\infty}{\sim} \alpha\frac{1}{j^{\alpha-1}}.$$

On reconnait le terme général d'une série de Riemann convergente si et seulement si $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$.
Ainsi X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, si et seulement si la série de terme général $j^2\mathbb{P}(X=j)$ converge absolument, si et seulement si $\alpha > 2$ d'après le critère de comparaison avec la série de Riemann ci-dessus.