Corrigé du DM n°2

1. On a les équivalences suivantes

$$x \in f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) \Leftrightarrow f(x) \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - |x| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{3} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1, +\infty[.$$

   Ainsi, $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) = [1, +\infty[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|x| < 1 + |x|$, d'où

$$|f(x)| = \frac{|x|}{|1+|x||} = \frac{|x|}{1+|x|} < 1.$$

   Cela montre exactement que $f(\mathbb{R}) \subset]-1, 1[$.

3. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$, alors en particulier $|f(x)| = |y|$, c'est-à-dire $\frac{|x|}{1+|x|} = |y|$. D'où $|x| = |y| + |x||y|$ puis $|x|(1-|y|) = |y|$ et finalement, puisque $1 - |y| \neq 0$,

$$|x| = \frac{|y|}{1-|y|}.$$

4. Soit $y \in]-1, 1[$. L'équation $f(x) = y$ implique $|x| = \frac{|y|}{1-|y|}$ d'après la question précédente, donc aussi

$$x = y(1+|x|) = y\left(1 + \frac{|y|}{1-|y|}\right) = \frac{y}{1-|y|}.$$

   Cela montre que f est injective. Réciproquement, en considérant le réel $x := \frac{y}{1-|y|}$ (possible car $1 - |y| \neq 0$), on a

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1-|y|} \times \frac{1}{1+\frac{|y|}{1-|y|}} = y,$$

   ce qui montre que $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est également surjective. Finalement, f est bijective et le raisonnement qui précède montre que son application réciproque est

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{y}{1-|y|}. \end{array}$$

5. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Ainsi f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont celle au dénominateur ne s'annule pas. En outre, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   Etudions la dérivabilité de f en 0 : on a pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{1+|x|} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

   de sorte que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2}.$$

6. D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   En remarquant que f est impaire, on a aussi immédiatement

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -1.$$

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	
variation de f	-1	1

7. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f \circ g(x) = f(x^2) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = g\left(\frac{x}{1+|x|}\right) = \frac{x^2}{(1+|x|)^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+|x|)^2} = \frac{2|x|x^2}{(1+x^2)(1+|x|)^2}.$$

En particulier, on observe que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geq 0$ (avec égalité si et seulement si $x = 0$).

8. Remarquons que la fonction h est paire. En particulier $h(-1) = h(1)$ et la fonction h n'est pas injective. L'étude du signe de h dans la question précédente montre que $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective : par exemple $-1 \notin h(\mathbb{R})$.

Exercice facultatif.

1. (a) On calcule les différences :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k^2} = \frac{k(k+1) - k^2 - (k+1)}{k^2(k+1)} = \frac{-1}{k^2(k+1)} < 0 \text{ pour } k > 0,$$

et

$$\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{k - 1 - k^2 + k(k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{-1}{k^2(k-1)} < 0 \text{ pour } k > 1$$

Donc pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

(b) On reconnait une somme télescopique

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \text{ avec le changement d'indice } i = k-1 \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{1} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1 \text{ car } n \geq 1.\end{aligned}$$

2. (a) En sommant les inégalités $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, on obtient :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leq 1$$

(b) On a pour tout $n \geq 1$:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

donc $S_{n+1} \geq S_n$.

(c) $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée (par 1), donc d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie (que l'on notera L).

3. (a) Il faut reconnaître pour la suite que

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

En sommant les inégalités, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, on obtient comme $n \geq m \geq 1$:

$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$$

(b) En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{1}{m+1} \leq R_m \leq \frac{1}{m}$$

4. Comme on a

$$L - S_n \leq 10^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad R_m \leq 10^{-2}.$$

Donc pour $m = 100$, S_{100} donnera donc une valeur approchée à 10^{-2} près de L.