Corrigé du DM n°3

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

1. La suite (x_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux.
Son équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{1}{3} = 0$ a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$ et pour solutions

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}.$$

Il existe donc deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = A\,(r_1)^n + B\,(r_2)^n$.
Et ces deux racines appartenant à $]-1,1[$ on a alors $(r_1)^n \to 0$ et $(r_2)^n \to 0$.
Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0}$
a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.
On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "u_n et u_{n+1} sont définis, $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$".
Initialisation : u_0 et u_1 définis $u_0 = a \geq 1$ et $u_1 = b \geq 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$ alors $u_{n+1} \geq 0$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$ est bien défini (car $u_n \geq 0$ et $u_{n+1} \geq 0$) et $u_{n+2} \geq 2 \geq 1$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, on a : pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n \text{ est définie et } u \geq 1.}$
(b) Si u a une limite finie ℓ alors $\ell \geq 1$ et u_{n+1} et u_{n+2} également.
La fonction $\sqrt{\ }$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$ et ℓ en étant élément, $\ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell}$
donc $\ell^2 = 4\ell$ d'où $\ell = 4$ ou $\ell = 0$ et comme $\ell \geq 1$
Conclusion : $\boxed{\text{la seule limite possible de la suite } (u_n) \text{ est } 4.}$

3. On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

(a) On a $u_n = 4\,(v_n+1)^2$ alors si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.
(b) On simplifie l'égalité par équivalence : $(2 + v_n \neq 0\ )$

$$\begin{aligned}
v_{n+2} = \frac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})} &\iff 2(2+v_{n+2})v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \\
&\iff 2\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \\
&\iff 2\left(\frac{1}{4}u_{n+2} - 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 2 \\
&\iff u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}
\end{aligned}$$

cette égalité étant vraie, la premièer également.
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}.}$
Comme $u_{n+2} \geq 1$ alors $v_{n+2} = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 \geq -\frac{1}{2}$ et $2\,(2+v_{n+2}) \geq 3$ donc

$$v_{n+2} \leq \frac{1}{3}\,(v_{n+1} + v_n)$$

Et comme (inégaité triangulaire) $|a+b| \leq |a| + |b|$ pour tout a et b réel :
Conclusion : $\boxed{|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right).}$

(c) On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$0 \leq |v_n| \leq x_n$ et $0 \leq |v_{n+1}| \leq x_{n+1}$".
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$ alors

$$\begin{aligned} |v_{n+2}| &\leq \frac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right) \\ &\leq \frac{1}{3}\left(x_n + x_{n+1}\right) = x_{n+2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, on a : pour tout entier } n,\ 0 \leq |v_n| \leq x_n.}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ d'après la première question, alors par encadrement :
Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

Exercice facultatif.

1. (a) Calculer $a_1 = \sum\limits_{k=0}^{0} \frac{1}{1+k} = 1$, $\quad a_2 = \sum\limits_{k=0}^{1} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

(b) On effectue dans $a_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1+k}$ le changement de variable $j = k+1$ ce qui nous donne

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+j} = a_n + \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n} - \frac{1}{n} = a_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = a_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}.$$

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{-1}{2n(2n+1)} \leqslant 0$ donc la suite (a_n) est décroissante.

(c) a_n est la somme de termes positifs donc $a_n \geqslant 0$ donc la suite (a_n) est minorée par 0 et elle est décroissante donc elle converge.

2. (a)

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) - \ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

On pose $f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x}$. Pour $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x(x+1) + (x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)} \geqslant 0.$$

La fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est négative sur $]0, +\infty[$ ce qui démontre la seconde inégalité.
On pose $g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}$. Pour $x \in]0, +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)} \leqslant 0.$$

La fonction g est décroissante sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Ainsi la fonction g est positive sur $]0, +\infty[$ ce qui démontre la première inégalité.

(b) En remplaçant x par $n+k$ dans l'encadrement précédent, on obtient

$$\frac{1}{n+k+1} \leqslant \ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leqslant \frac{1}{n+k}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \left(\ln(n+k+1) - \ln(n+k)\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k}$$

(c) On reconnait une somme télescopique

$$\sum_{k=0}^{n-2} (\ln(n+k+1) - \ln(n+k)) = \ln(n+n-2+1) - \ln(n+0) = \ln(2n-1) - \ln n = \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

(d) $a_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k}$ et le changement de variable $j = k-1 \Leftrightarrow k = j+1$ nous donne

$$a_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k+1}.$$

(e) Il est immédiat que

$$a_n - \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k}.$$

(f) Les deux questions précédentes montrent que

$$a_n - \frac{1}{n} \leqslant \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad a_n \leqslant \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$$

et

$$\ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) \leqslant a_n - \frac{1}{2n-1} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n-1} \leqslant a_n$$

donc

$$\ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n-1} \leqslant a_n \leqslant \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}.$$

On remarque ensuite que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = \ln 2$$

donc le théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ln 2.$$