Corrigé du DM n°7

1. (a) On a

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \left(P^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_2$$

Comme $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $1 \times 1 - (-1) \times 1 = 2 \neq 0$, alors P est inversible et d'après la formule de Cramer

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}.A.P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/8 & 8/8 \\ -2/8 & 8/8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D est donc une matrice diagonale.

2. On a

$$\begin{aligned} D_a &= P^{-1}.A.P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a-1 & 1 \\ 1-2a & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4a-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D_a est donc une matrice diagonale.

3. Soit $Y = P^{-1}.Z.P$.

(a) Comme P est inversible, on a les équivalences suivantes

$$Z^2 = A \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}Z^2 = P^{-1}A \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}Z^2P = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}ZP{\cdot}P^{-1}ZP = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad Y^2 = D_a$$

(b) Soit $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

i. L'équation (2) est donc équivalente à

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ zx+tz & yz+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+yz = 2a-1 \\ zx+tz = 0 \\ xy+yt = 0 \\ yz+t^2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+yz = 2a-1 \\ z\,(x+t) = 0 \\ y\,(x+t) = 0 \\ yz+t^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ii. On raisonne par l'absurde : on suppose que $x + t = 0$.

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+yz = 2a-1 \\ yz+t^2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+yz = 2a-1 \\ yz+x^2 = 1 \quad \text{car } x = -t \end{cases}$$

On obtient donc que $2a-1 = 1$, ainsi $a = 1$ Or $0 < a < 1$, on obtient donc une contradiction. On en conclut que $x + t = 0$ est impossible. Donc $x + t \neq 0$.

iii. Comme $x + t \neq 0$,

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+yz = 2a-1 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ yz+t^2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 2a-1 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ t^2 = 1 \end{cases}$$

— Si $2a-1 < 0$ i.e. $a < 1/2$, il n'y a pas de solution.
— si $2a-1 = 0$ i.e. $a = 1/2$ il y a deux solutions : $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 1)$ et $(0, 0, 0, -1)$

— et si $a > 1/2$, i ly a 4 solutions $(x, y, z, t) = \left(\sqrt{2a-1}, 0, 0, 1\right)$, $\left(-\sqrt{2a-1}, 0, 0, 1\right)$, $\left(\sqrt{2a-1}, 0, 0, -1\right)$ et enfin $\left(-\sqrt{2a-1}, 0, 0, -1\right)$

(c) On rappelle que
$$Y = P^{-1}.Z.P \quad \Leftrightarrow \quad Z = P.Y.P^{-1}.$$
Ainsi, à des valeurs différentes de Y correspondront des valeurs distinctes de Z. De plus,
$$Y \text{ solution de } (2) \quad \Leftrightarrow \quad Z \text{ solution de } (1)\,.$$
Il y aura 0, 2 ou 4 solutions à (1) suivant que $a < 1/2$, $a = 1/2$ ou $a > 1/2$.

(d) Avec $a = 5/8 > 1/2$, ainsi il y aura 4 solutions. On a $\sqrt{2a-1} = 1/2$ et les solutions sont avec $x = \pm 1/2$ et $t = \pm 1$

$$Z = P\,Y\,P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -x \\ t & t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+t & -x+t \\ -x+t & x+t \end{pmatrix}$$

Les solutions de (1) sont donc
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \text{ ou } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \text{ ou } -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice facultatif.

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I : Réduction de A

1. A est une matrice triangulaire supérieure possédant un coefficient diagonal nul donc
   Conclusion : $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$
2. P est une matrice triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls donc
   Conclusion : $\boxed{P \text{ est inversible.}}$
   Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tels que
   $$PX = Y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_2 + x_3 & = & y_2 \\ x_3 & = & y_3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 - y_2 \\ x_2 & = & y_2 - y_3 \\ x_3 & = & y_3 \end{array}\right.$$
   On obtient donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$
3. On calcule PDP^{-1}
   $$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation $(*)$: $M^2 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M\ P$. (La matrice P a été définie en **I.3.**)

1. Avec $A = P\ D\ P^{-1}$ et $M = P\ N\ P^{-1}$, on a $M^2 = P\ N^2\ P^{-1}$. Ainsi
   $$M^2 = A \Longleftrightarrow P\ N^2\ P^{-1} = P\ D\ P^{-1} \Longleftrightarrow N^2 = D \quad \text{en multipliant à gauche par } P^{-1} \text{ et à droite par } P$$
2. Si $N^2 = D$, alors $N\ D = N\ N^2 = N^3 = N^2\ N = D\ N$.
   Conclusion : $\boxed{\text{Si } N^2 = D, \text{ alors } N\ D = D\ N.}$

3. On développe l'écriture de $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

On ne calcule pas N^2 (les calculs seraient ici longs et fastidieux) : on commence par exploiter la question précédente.

$N\ D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix}$

$D\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$

Si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$ donc $\left\{ \begin{array}{lll} 0 = 0 & b = 0 & 4c = 0 \\ 0 = d & e = e & 4f = f \\ 0 = 4g & h = 4h & 4i = 4i \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{llll} & b = 0 & c = 0 \\ d = 0 & & f = 0 \\ g = 0 & h = 0 & \end{array} \right.$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } N^2 = D, \text{ alors } N \text{ est diagonale.}}$

4. Soit $N = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, on a $N^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$, donc

$$N^2 = D \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 0 \\ y^2 = 1 \\ z^2 = 4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 2 \end{array} \right.$$

Les 4 solutions sont $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Si B est solution de (1) alors d'après les questions précédentes, $N = P^{-1}BP$ est égale à l'une des quatre matrices de la question précédente. Or on veut que tous les coefficients diagonaux de N soient positifs ou nuls donc

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $B = P\ N\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Conclusion : $\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Un polynôme de degré 2 s'écrit : $Q(X) = aX^2 + bX + c$ avec a, b et c réels, $a \neq 0$.

$\left\{ \begin{array}{l} Q(0) = 0 \\ Q(1) = 1 \\ Q(4) = 2. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 2. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 16a + 4b = 2 \quad L_3 - 4L_2 \to L_3 \end{array} \right.$,

$\iff \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 12a = -2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ b = 7/6 \\ a = -1/6 \end{array} \right.$ et $a \neq 0$

Conclusion : $\boxed{\text{Cet unique polynôme de degré 2 est : } Q(X) = -\frac{1}{6}X^2 + \frac{7}{6}X}$

2. Comme $A = PDP^{-1}$, on a $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. On obtient

$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = -\frac{1}{6}PD^2P^{-1} + \frac{7}{6}PDP^{-1} = P\left(-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D\right)P^{-1}$$

On calcule $-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} + \frac{7}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On retrouve donc la matrice B définie en **II.5.**

$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = P\left(-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D\right)P^{-1} = B$$

Conclusion : $\boxed{-\dfrac{1}{6}A^2+\dfrac{7}{6}A=B}$

3. Pour toute matrice carrée F d'ordre trois :
   - Si $A\,F=F\,A$, alors $A^2F=AFA=FAA=FA^2$ et $\left(-\dfrac{1}{6}A^2+\dfrac{7}{6}A\right)F=F\left(-\dfrac{1}{6}A^2+\dfrac{7}{6}A\right)$, donc $B\,F=F\,B$.
   - Réciproquement, si $B\,F=F\,B$, alors $B^2F=BFB=FBB=FB^2$ et comme $B^2=A$, on a donc $A\,F=F\,A$.

   Conclusion : $\boxed{A\,F=F\,A\Longleftrightarrow B\,F=F\,B.}$