Corrigé du DM n°9

On note $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]1,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

1. f est dérivable en x tel que $x > 0$ et $x\ln(x) \neq 0$ donc sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Sur $]1,+\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{(x\ln(x))^2} > 0 \qquad \text{car } \ln(x) > \ln(1)$$

donc $f' < 0$ et f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.
En $+\infty$: $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)} \to 0$ et on a une asymptote horizontale.
En 1^+ : $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)} \to +\infty$ et on a une asymptote verticale.

2. Pour $k \geq 3$ on a $k-1 \geq 2 > 1$ donc f est strictement décroissante sur $[k-1,k]$ ainsi

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$$

donc pour tout $x \in [k-1,k]$

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\,dt \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dt = f(k-1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$

3. (a) Pour $n \geq 3$, on somme alors ces inégalités de 3 à n.

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$$

On a alors

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) = \left(\sum_{k=2}^{n} f(k)\right) - f(2)\,.$$

D'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{2}^{n} f(x)\,dx$$

Après changement d'indice, on obtient

$$\sum_{k=3}^{n} f(k-1) = \sum_{k=2}^{n-1} f(k) = \left(\sum_{k=2}^{n} f(k)\right) - f(n)$$

d'où finalement pour tout entier $n \geq 3$ (vrai égalment pour $n = 2$), donc pour $n \geq 2$

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_{2}^{n} f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$$

(b) On calcule

$$\int_{2}^{n} f(x)\,dx = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

d'où les deux inégalités :

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

(c) En divisant de part et d'autre par $\ln(\ln(n)) > 0$ on obtient :

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)\ln(\ln(n))}$$

et par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\ln(\ln(n))}=1$$

Donc

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, on note

$$u_n=S_n-\ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n=S_n-\ln(\ln(n))$$

4. Pour montrer que ces suites sont adjacentes, il faut montrer que l'iune est décroissante, l'autre croissante et la différence tend vers 0 :
   — On a
   $$v_n-u_n=S_n-\ln(\ln(n))-S_n+\ln(\ln(n+1))=\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)$$
   de plus
   $$\ln(n+1)=\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
   alors
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}=1$$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n=0$.
   — Pour la suite u :
   $$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= S_{n+1}-\ln(\ln(n+2))-S_n+\ln(\ln(n+1)) \\ &= f(n+1)-[\ln(\ln(x))]_{n+1}^{n+2}=f(n+1)-\int_{n+1}^{n+2}f(x)\,dx\geq 0 \end{aligned}$$
   d'après la question 2 pour $k=n+2$, la suite u est croissante.
   — Pour la suite v :
   $$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= S_{n+1}-\ln(\ln(n+1))-S_n+\ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1)-[\ln(\ln(x))]_{n}^{n+1}=f(n+1)-\int_{n}^{n+1}f(x)\,dx\leq 0 \end{aligned}$$
   la suite v est décroissante.

   On en conclut que les suites u et v sont donc bien adjacentes et ont une limite commune ℓ.

5. (a) Comme la suite v est décroisante et u croissante, on a pour tout $n\geq 2$
   $$u_n\leq \ell\leq v_n.$$
   En retranchant v_n on obtient pour tout $n\geq 2$
   $$u_n-v_n\leq \ell-v_n\leq 0$$
   Ainsi en multipliant par -1
   $$0\leq v_n-\ell\leq v_n-u_n$$
   De plus,
   $$v_n-u_n=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(n))=\int_n^{n+1}f(x)\,dx$$
   d'après la question 2 pour $k=n+1$ on a
   $$v_n-u_n\leq f(n)$$
   $$0\leq v_n-\ell\leq\frac{1}{n\ln(n)}$$

   (b) Pour avoir une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près, il suffit de donner v_n pour $\frac{1}{n\ln(n)}\leq 10^{-2}$.

```
import numpy as np
n=1
S=0
while 1/(n*np.log(n))>10**(-2):
   n=n+1
   S=S+1/(n*np.log(n))
print(S-np.log(np.log(n)))
```

Exercice facultatif.

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n \underset{+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

φ_n étant continue, l'intégrale est bien définie.

1. On a
$$I_0 = \int_0^1 \varphi_0(x)\, dx = \int_0^1 e^{-2x}\, dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}.$$
De plus,
$$I_1 = \int_0^1 \varphi_1(x)\, dx = \int_0^1 (1-x)\, e^{-2x} dx$$
en intégrant par parties avec
$$u(x) = (1-x) \quad u'(x) = -1$$
$$v'(x) = e^{-2x} \quad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$
les fonctions u et v étant de classe C^1 on a :
$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(1-x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2} \end{aligned}$$

2. Comme on ne peut pas calculer facilement I_n, pour comparer I_n et I_{n+1} on compare d'abord leurs contenus :
$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) &= (1-x)^{n+1} e^{-2x} - (1-x)^n e^{-2x} = (1-x)^n (1-x-1)\, e^{-2x} \\ &= -x(1-x)^n e^{-2x} \leq 0 \text{ sur } [0,1] \end{aligned}$$
Donc $\varphi_{n+1} \leq \varphi_n$ sur $[0,1]$. Comme $0 \leq 1$ (bornes) alors par croissance de l'intégrale
$$\int_0^1 \varphi_{n+1}(x)\, dx \leq \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx$$
Conclusion : $\boxed{\text{la suite } I \text{ est décroissante}}$

3. Pour tout $x \in [0,1]$: $(1-x)^n e^{-2x} \geq 0$ donc $(0 \leq 1)$ on a pour tout entier naturel n
$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx \geq 0.$$
La suite I étant décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

4. La fonction $x \to e^{-2x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc pour$x \in [0,1]$ on a
$$e^{-2x} \leq e^0 = 1$$
On a alors par croissance de l'intégrale. Pour tout $x \in [0,1]$: $e^{-2x} \leq 1$ et $(1-x)^n \geq 0$ donc $(1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n$ d'où
$$\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \leq \int_0^1 (1-x)^n\, dx$$
or
$$\int_0^1 (1-x)^n\, dx = \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Par encadrement, on a alors } I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

5. On a

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$$

on intègre par parties en posant

$$u(x) = (1-x)^{n+1} \quad u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$$

$$v'(x) = e^{-2x} \quad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

les fonctions u et v étant de classe C^1 on a :

$$I_{n+1} = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n+1}{2}(1-x)^n e^{-2x} dx = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx = \frac{1}{2}\left[1-(n+1)I_n\right]$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n.}$

6. Comme $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$ on a alors

$$n\,I_n + I_n = 1 - 2I_{n+1} \quad \Rightarrow \quad n\,I_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Conclusion : $\boxed{n\,I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$

7. D'après la question précédente, on a

$$nI_n - 1 = -2I_{n+1} - I_n \quad \Leftrightarrow \quad n(nI_n - 1) = -2n\,I_{n+1} - n\,I_n$$

on fait apparaître $(n+1)\,I_{n+1}$ car $(n+1)\,I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

$$n(nI_n - 1) = -2\frac{n}{n+1}(n+1)\,I_{n+1} - n\,I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -3$$

Conclusion : $\boxed{n(n\,I_n - 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -3.}$

8. Pour trouver valeurs de a, b, c, on cherche par identification : soit a, b et c des réels tels que

$$I_n \underset{+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

— Comme $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

$$a = 0$$

— Ainsi

$$nI_n \underset{+\infty}{=} b + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$$

or $n\,I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc

$$b = 1$$

— Donc

$$n(n\,I_n - 1) \underset{+\infty}{=} c + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$$

or $n(n\,I_n - 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -3$ donc

$$c = -3$$

De plus, vérifions que $I_n - a - \frac{b}{n} - \frac{c}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On a

$$n^2\left(I_n - a - \frac{b}{n} - \frac{c}{n^2}\right) = n^2\left(I_n - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = n(nI_n - 1) + 3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Conclusion : $\boxed{\text{Les seules valeurs possibles sont } a = 0,\ b = 1 \text{ et } c = -3.}$