DM n°1

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(1 + x).$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. (a) Calculer pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer le signe de $f(x) - x$ selon la valeur de x.
3. Tracer la courbe représentative de f
4. On suppose dans cette question que $u_0 \in]e - 1, +\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n \leq u_{n+1}.$$
   (b) En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ou $e - 1$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0, e - 1[$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$0 < u_n < e - 1.$$
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis sa limite.

Exercice facultatif.

Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \ln(x) + x$$

1. (a) Étudier les variations de f.

   (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 1$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

   (a) Montrer que pour tout entier n :

$$u_n \geq 1$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

   (c) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).

3. On suppose à présent que $u_0 = e$

   (a) Montrer que, pour tout entier n :

$$u_{n+1} \geq u_n + 1$$

   (b) En déduire que, pour tout entier n :

$$u_n \geq n + e$$

   (c) Retrouver la limite de la suite (u_n).

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 \in]0,1[$ et pour tout entier n,

$$v_{n+1} = f(v_n)$$

   (a) Montrer qu'il existe un entier r pour lequel

$$v_r < 0.$$

   (b) En déduire que la suite (v_n) n'est plus défnie à partir du rang $r+1$.