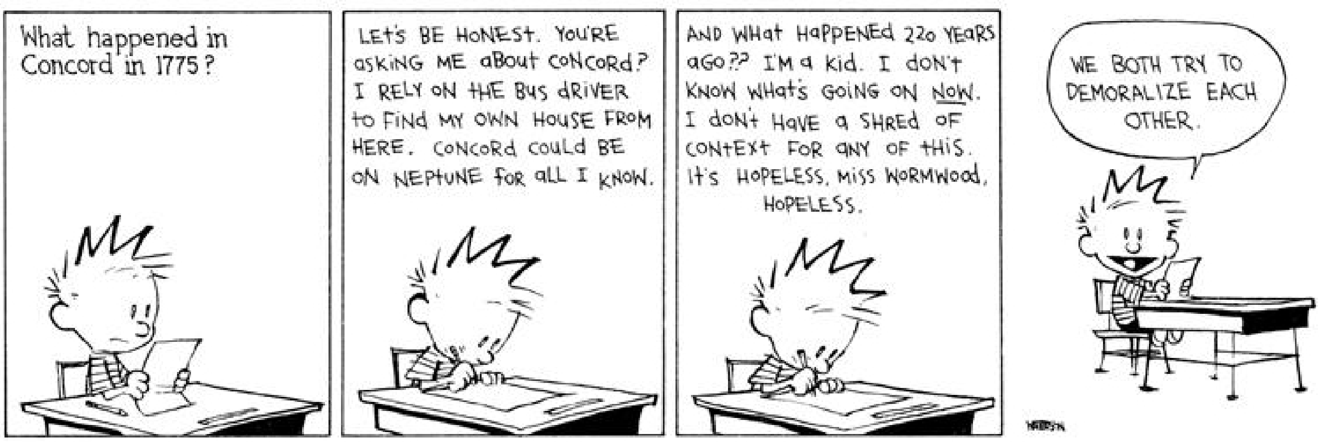
DM n°10

On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.
2. (a) Déterminer le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.
   (b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que
   $$f'(0) = \frac{1}{2}.$$
   (c) En déduire le développement limité à l'ordre 1 de $f(x)$ au voisinage de 0.
   (d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
   (b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.
   (c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variations.
4. (a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que
   $$f(u_n) = n.$$
   Donner la valeur de u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge et que
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$



Exercice facultatif.

On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.
2. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose que cette fonction est dérivable au point 1, elle vérifie donc :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

(a) Établir pour tout $x \in [0,1[$ l'égalité :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\right).$$

(b) En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ est croissante sur $[0,1[$ et qu'elle vérifie pour tout $x \in [0,1[$:

$$0 \leqslant \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leqslant f'(1).$$

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel N non nul, on a :

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} n a_n \leqslant f'(1).$$

En déduire que la série de terme général $n a_n$ est convergente.

(b) À l'aide des résultats des questions 2.(a) et 3.(a), montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$0 \leqslant \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leqslant f'(1)$$

(c) En déduire que

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n.$$