DM n°11

On rappelle que la série géométrique de terme général x^n est convergente pour $x \in]-1;1[$, et que

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

La fonction S ainsi définie sur $]-1,1[$ est de classe C^∞ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S^{(k)}$ est définie sur $]-1,1[$ par

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

1. Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

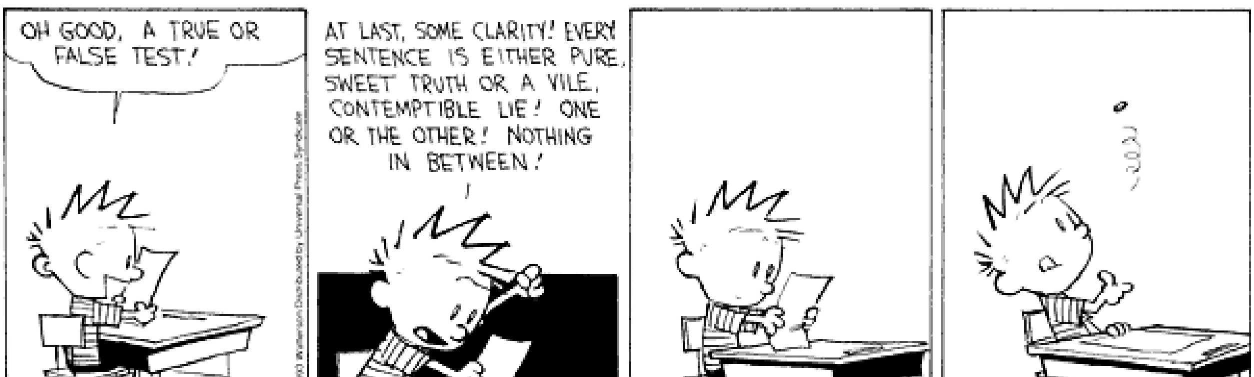
$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. Soit $p \in]0, \frac{2}{3}[$. Dans un pays, la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants est notée q_n et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$q_n = \frac{1}{2}p^n.$$

De plus, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir une fille (ou un garçon) est $\frac{1}{2}$.

(a) Calculer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant.
(b) Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.
(c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On considère une famille de n enfants ; calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k filles.
(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k filles.
(e) Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucune fille.



Exercice facultatif.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul,

$$\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X > j-1) - \mathbb{P}(X > j).$$

(b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}(X = j) = \left(\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j)\right) - p\,\mathbb{P}(X > p).$$

2. (a) On suppose que X admet une espérance $E(X) = \mu$.

i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$.

ii. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = 0.$$

iii. En déduire que

$$\lim_{p\to+\infty} p\,\mathbb{P}(X > p) = 0.$$

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(X > j)$ converge.

v. Montrer que

$$\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j).$$

(b) On suppose que $\sum_{j\geq 0} \mathbb{P}(X > j)$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geq 1}$ définie par

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j).$$

ii. Comparer $\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X = j)$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j)$.

iii. En déduire que X admet une espérance.

(c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X > j)$ converge.

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait

$$\mathbb{P}(X > j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}. \qquad (*)$$

(a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

(c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul

$$\mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right).$$

(d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0,1]$.

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul,

$$\mathbb{P}(X = j) \leq \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}.$$

(e) Montrer, en utilisant le résultat de (c), que

$$\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}(X = j) = \alpha.$$

(f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.