DM n°12

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

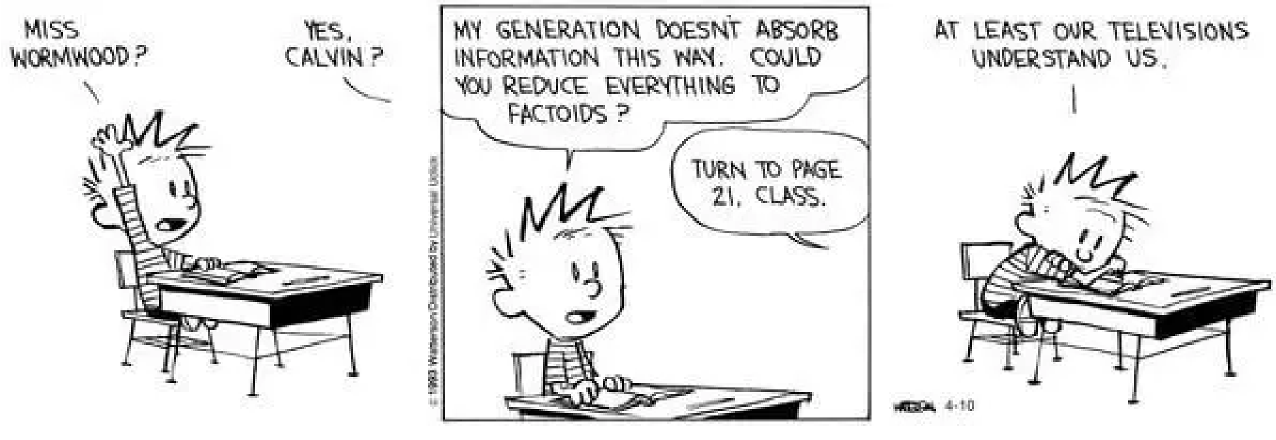
Partie 1 : Calcul matriciel

1. Déterminer si la matrice P est inversible (on effectuera des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes de P afin de déterminer son rang).
2. Calculer P^{-1} (en résolvant le système $PX = Y$) et vérifier que
$$A = P\ D\ P^{-1}.$$
3. Calculer la matrice $C = P^{-1}B\ P$ et vérifier que C est diagonale.

Partie 2 : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \to E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe
$$f(M) = AM - MB.$$

1. Donner la dimension de E.
2. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
3. Soit $M \in E$, on note
$$N = P^{-1}M\ P.$$
   (a) Montrer que
   $$M \in \mathrm{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad DN = NC.$$
   (b) Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.
   (c) Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.
4. (a) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Donner au moins un élément non nul de $\mathrm{Ker}(f)$ et donner au moins un élément non nul de $\mathrm{Im}(f)$.



Exercice facultatif.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, ..., v_n$ dans la base $\mathcal{B}$ et qui vérifie

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1.$$

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe le vecteur $f(x)$ défini par :

$$f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v.$$

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer que $f \circ f = f$.
2. Déterminer une famille de vecteurs (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$f(u_1) = 0 \quad \text{et} \quad f(u_2) = u_2.$$

3. (a) Montrer que

$$y \in \mathrm{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = y.$$

   (b) Montrer que

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq n - 1.$$

   (c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f).$$

   (d) On note $\mathcal{F} = (e_i - e_{i+1})_{i \in [\![1, n-1]\!]}$. Montrez que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre.
   (e) En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?
4. (a) Déterminer une base du noyau de f.
   (b) On note $\mathcal{B}' = (e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n, v)$. Montrez que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
   (c) Écrire la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$.