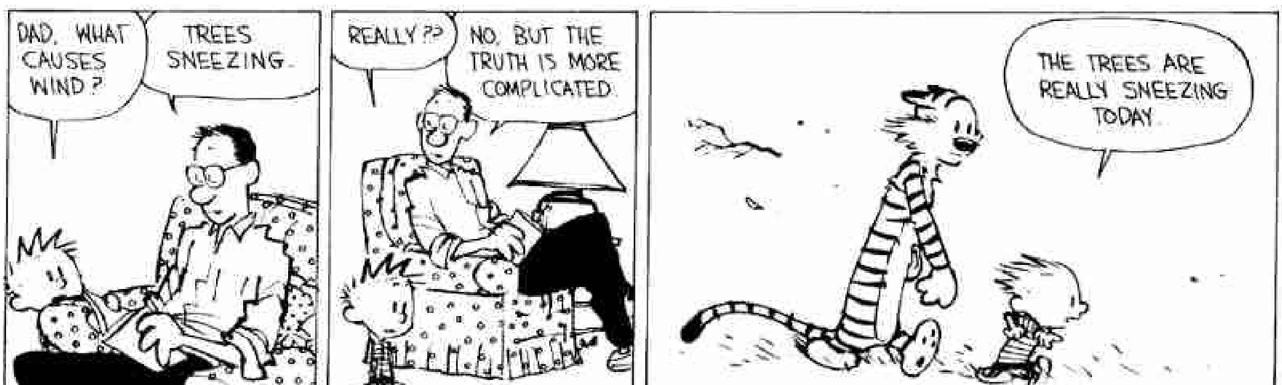
DM n°2

On considère la fonction

$$f \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|}. \end{array}$$

1. Déterminer $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\right)$.
2. Montrer que
$$f(\mathbb{R}) \subset \left]-1,1\right[.$$
3. Soit $y \in \left]-1,1\right[$. Montrer que s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que
$$f(x) = y,$$
alors
$$|x| = \frac{|y|}{1-|y|}.$$
4. En déduire que l'application $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \left]-1,1\right[$ est bijective et expliciter sa bijection réciproque.
5. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Dresser le tableau de variation complet de f.
7. Dans cette question, on introduit les fonctions
$$g \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad h \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f \circ g(x) - g \circ f(x). \end{array}$$
   (a) Calculer $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire le signe de h sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction h est-elle injective ? surjective ?



Exercice facultatif.

Le but de l'exercice est d'étudier la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout n entier $n \geq 2$,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. (a) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

   (b) Pour $n \geq 2$, montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leq 1.$$

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$S_n \leq 1.$$

   (b) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$S_n \leq S_{n+1}.$$

   (c) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie (que l'on notera L).

   Pour pour tout entier $m \geq 2$, on note

$$R_m = L - S_m = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (S_n - S_m).$$

3. (a) Montrer que pour tout entier m et $n \geq m \geq 1$:

$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{m}$$

   (b) En déduire que pour tout entier $m \geq 1$:

$$\frac{1}{m+1} \leq R_m \leq \frac{1}{m}$$

4. Déterminer la plus petite valeur de m telle que $L - S_m \leq 10^{-2}$