DM n°3

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

1. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

On donne : $\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \approx 0,77$ et $\dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \approx -0,44$. a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.
On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geq 1$.
   (b) Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.
3. On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

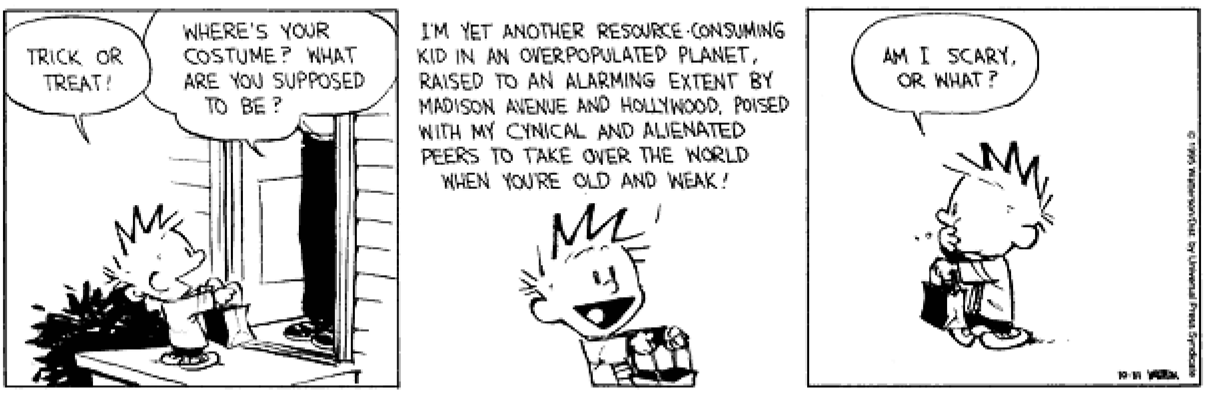
   (a) Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.
   (b) Vérifier, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}.$$

   En déduire que : $|v_{n+2}| \leq \dfrac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$.
   (c) On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

   Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leq x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).



Exercice facultatif.

On pose

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

1. Convergence de la suite (a_n).
   (a) Calculer a_1 et a_2 (on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).
   (b) Justifier que $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n}$ puis étudier le sens de variation de (a_n).
   (c) En déduire la convergence de la suite (a_n).
2. Calcul de la limite.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x+1) - \ln x)$ puis montrer que
   $$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}.$$
   (b) Comparer les réels suivants
   $$\frac{1}{n+k+1}, \quad \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad \ln(n+k+1) - \ln(n+k).$$
   Comparer alors les sommes suivantes
   $$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k+1}, \quad \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-2} \left(\ln(n+k+1) - \ln(n+k)\right).$$
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \left(\ln(n+k+1) - \ln(n+k)\right)$.
   (d) Montrer que
   $$a_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k+1}.$$
   (e) Montrer que
   $$a_n - \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k}.$$
   (f) En déduire que
   $$\forall n \geqslant 1, \quad \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n-1} \leqslant a_n \leqslant \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}.$$
   (g) Déterminer la limite de la suite (a_n).