DM n°4

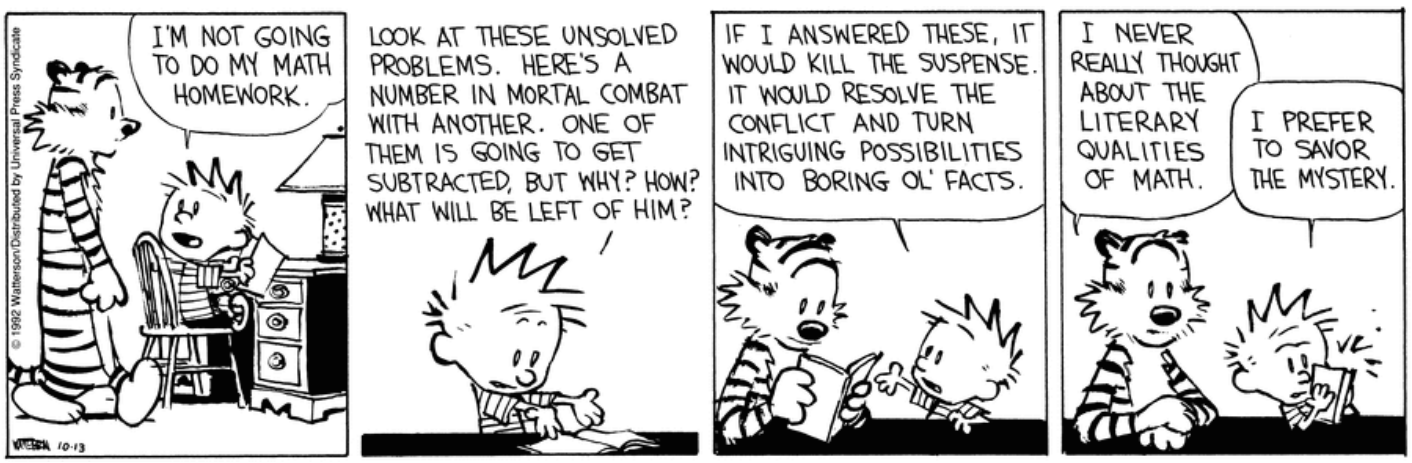
Dans cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. On peut appeler X_N le " nombre de changements " au cours des N premiers lancers.

Par exemple , si les 9 premiers lancers ont donné successivement :

Pile , Pile , Face , Pile , Face , Face , Face , Pile , Pile

alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux $3^{ième}$, $4^{ième}$, $5^{ième}$ et $8^{ième}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$.
2. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.
3. Montrer que
$$P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \quad \text{et} \quad P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{N}.$$
4. (a) Justifier que pour tout entier k de $[\![0, N-1]\!]$:
$$P_{[X_N=k]}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}.$$
   (b) En déduire que pour tout entier k de $[\![0, N-1]\!]$:
$$P\left([X_{N+1} - X_N = 0] \cap [X_N = k]\right) = \frac{1}{2}P(X_N = k).$$
   (c) En sommant cette relation de $k = 0$ à $N-1$, montrer que
$$P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}.$$
   (d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. En déduire la relation
$$E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N),$$
   puis donner $E(X_N)$ en fonction de N.



Exercice facultatif.

Soient k et n deux entiers naturels tels que $0 < 3k \leq n$

1. (a) Montrer que pour tout i tel que $0 \leq i \leq k-1$,

$$\binom{n}{i} \leq \frac{1}{2}\binom{n}{i+1}.$$

(b) Montrer par récurrence sur j que pour tout j tel que $0 \leq j \leq k$,

$$\binom{n}{k-j} \leq \frac{1}{2^j}\binom{n}{k}.$$

(c) En déduire que pour tout i tel que $0 \leq i \leq k$,

$$\binom{n}{i} \leq \frac{1}{2^{k-i}}\binom{n}{k}.$$

(d) Montrer que

$$\binom{n}{k} \leq \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} \leq 2\binom{n}{k}.$$

2. On appelle inégalité de Markov (à ne pas démontrer), l'inégalité suivante vérifiée par toute variable aléatoire Z finie

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{P}\left(|Z| \geq \lambda\right) \leq \frac{E\left(|Z|\right)}{\lambda}.$$

Soit X une variable aléatoire finie. En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|X - E(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est vérifiée pour tout variable aléatoire finie, cependant elle ne permet pas d'obtenir des encadrements précis des probabilités considérées.

Un buraliste vend des journaux le mardi matin ; il propose au choix, deux quotidiens A et B. Il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et 40 exemplaires de B. On suppose que :

— aucun client ne demande A et B
— si un client demande A (resp. B) alors que le stock de A (resp. B) est épuisé, il part sans demander B (resp. A)
— les demandes des clients sont indépendantes les unes des autres.

Un mardi, 60 clients se présentent dans la matinée. Chaque client demande A ou B avec la même probabiltié $\frac{1}{2}$.

3. Y est la variable aléatoire égale au nombre de clients qui demandent A dans cette matinée.
Déterminer la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

4. On note x la probabilité de l'événement

"Le buraliste ne satisfait pas toutes les demandes de journaux, cette matinée"

(a) Exprimer x à l'aide de la loi de Y.

(b) Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de x.

(c) Déduire de la question 1.(d) un encadrement de x.

(d) En utilisant la valeur approchée $\left(\frac{1}{2}\right)^{58}\binom{60}{19} \approx 0,0071$, comparer les résultats des questions b et c.