DM n°7

Soit $a \in]0,1[$, on définit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

Dans cet exercice, on cherche à résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation suivante d'inconnue Z

$$Z^2 = A \qquad (1)$$

1. Dans cette question, on suppose que $a = \dfrac{5}{8}$ et donc

$$A = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$$

   (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^2 puis P^4.

   (b) Montrer que P est inversible et trouver sa matrice inverse.

   (c) Déterminer la matrice $D = P^{-1}\,A\,P$.

2. On se place désormais dans le cas général où $a \in]0,1[$, ainsi

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}.$$

   Déterminer la matrice $D_a = P^{-1}\,A\,P$ où P est la matrice précédente.

3. On définit $Y = P^{-1}\,Z\,P$.

   (a) Montrer que l'équation (1) équivaut à

$$Y^2 = D_a \qquad (2)$$

   (b) On cherche à résoudre l'équation (2) en prenant Y sous la forme générale : $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

      i. Ecrire le système de quatre équations à quatre inconnues x, y, z et t qui est équivalent à l'équation (2)

      ii. Montrer qu'aucune solution de (2) ne vérifie $x + t = 0$.

      iii. Pour $a \in]0,1[$, résoudre ce système et donner toutes les solutions de l'équation (2) suivant la valeur de a.

   (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation (1) suivant la valeur de a.

   (d) Donner les quatre solutions de l'équation (1) dans le cas où $a = 5/8$.

Exercice facultatif.

On considère les matrices carrées d'ordre trois :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction de A

1. Déterminer si A est inversible.
2. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation suivante d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$(*) \quad M^2 = A.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $N = P^{-1}M\ P$. (La matrice P^{-1} a été définie en **I.2.**)

1. Montrer l'équivalence suivante
$$M^2 = A \iff N^2 = D.$$
2. Montrer que, si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$.
3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.
4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.
5. En déduire la solution B de l'équation $(*)$ tel que $P^{-1}BP$ soit une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux positifs ou nuls.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :
$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$
2. En déduire :
$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B. \quad \text{(La matrice } B \text{ a été définie en } \textbf{II.5.}\text{)}$$
3. Montrer que pour tout $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a
$$A\ F = F\ A \iff B\ F = F\ B.$$