DM n°9

On note $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]1, +\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geq 3$:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leq f(k-1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$

3. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_{2}^{n} f(x)\, dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)}$$

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

(c) Établir que

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

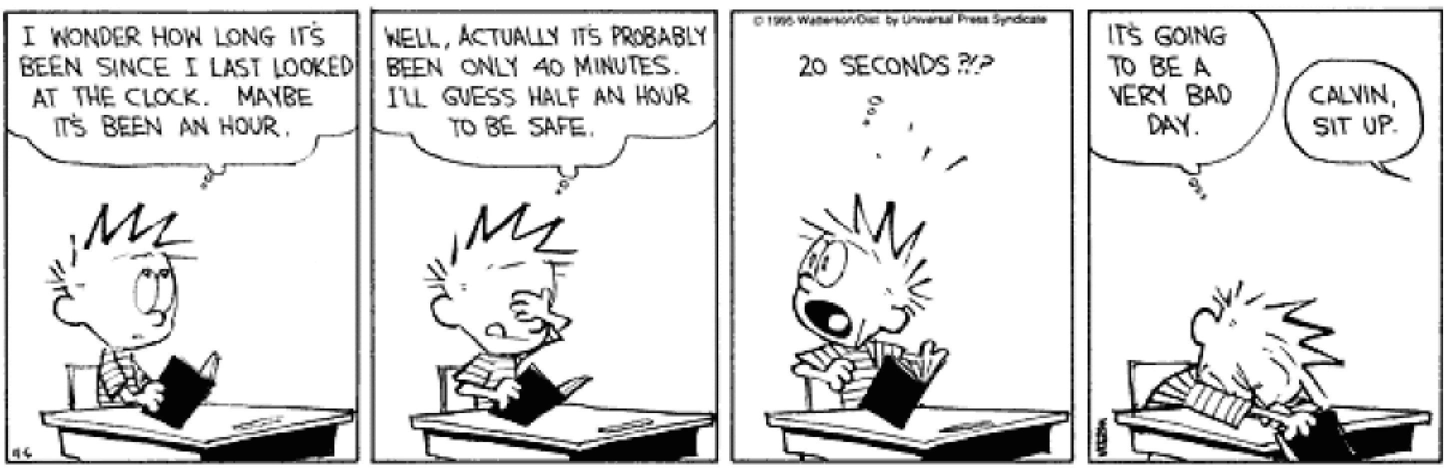
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4. En utilisant le résultat de la question 2., montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
5. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n \ln(n)}$$

(b) Ecrire un programme *Python* qui détermine une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.



Exercice facultatif.

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n \underset{+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n. Que peut-on en déduire pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$
En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n$$
6. En déduire la limite de la suite $(n\, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Déterminer la limite de la suite $(n\,(n\, I_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Déterminer les valeurs de a, b et c.