Mathématiques
Corrigé du DS n°2

Exercice 1.

a) faux b) vrai c) faux d) faux e) vrai f) faux
g) faux h) vrai i) faux j) vrai k) faux l) faux

Exercice 2.

1. Le dénominateur commun de l'expression à simplifier est $(x+1)(x^2-x+1)$ donc

$$\begin{aligned} & 3x+\frac{14}{x+1}+\frac{22x}{x^2-x+1}-2 \\ = & \frac{3x(x+1)(x^2-x+1)+14(x^2-x+1)+22x(x+1)-2(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ = & \frac{3x^4-2x^3+36x^2+11x+12}{(x+1)(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

2. Il suffit de développer le membre de gauche de l'égalité souhaitée, de regrouper les mêmes puissances de x puis d'appliquer le principe d'identification

$$(ax^2+bx+c)(3x^2+x+1)=3ax^4+x^3(a+3b)+x^2(a+b+3c)+x(b+c)+c.$$

Par identification des monômes de même degré,

$$\left\{\begin{array}{c} 3a=3 \\ a+3b=-2 \\ a+b+3c=36 \\ b+c=11 \\ c=12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b=-1 \\ c=12 \end{array}\right.$$

Nous venons donc de montrer que

$$\left(x^2-x+12\right)(3x^2+x+1)=3x^4-2x^3+36x^2+11x+12$$

3. D'après la question précédente, on obtient :

$$3x+\frac{14}{x+1}+\frac{22x}{x^2-x+1}-2=\frac{\left(x^2-x+12\right)(3x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

On explicite en premier lieu les valeurs interdites. Le trinôme x^2-x+1 admet comme discriminant -3 donc ne s'annule pas et reste positif (le coefficient dominant est positif) pour $x \neq 3$,

$$x^2-x+1>0.$$

Quant au facteur $x-1$, il s'annule uniquement pour $x=-1$. Par conséquent, $x=-1$ est l'unique valeur interdite de (E) et il est aisé d'obtenir les équivalences suivantes

$$(E) \Leftrightarrow 3x+\frac{14}{x+1}+\frac{22x}{x^2-x+1}-2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x^2-x+12\right)(3x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \leqslant 0$$

Le discriminant de x^2-x+12 est -47 et celui de $3x^2+x+1$ est -11. Ainsi chaque trinôme intervenant au numérateur ne s'annule pas et sur $\mathbb{R}$ et est de signe positif (leur coefficient dominant est positif). Le signe de la fraction étant donc celui de $x+1$, on a alors

$$(E) \Leftrightarrow \frac{\left(x^2-x+12\right)(3x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow x<-1$$

Tous les nombres réels strictement inférieurs à -1 sont les solutions de l'inéquation (E).

Exercice 3.

Soit $x \in \mathbb{R}$, de plus $x \neq -1$ et $x \neq -\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2 \quad & \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leq \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leq 2 \\
& \Leftrightarrow \quad -2 \leq \frac{x+1}{2x+1} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{2x+1} + 2 \geq 0 \text{ et } \frac{x+1}{2x+1} - 2 \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{5x+3}{2x+1} \geq 0 \text{ et } \frac{-3x-1}{2x+1} \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(x \in \left]-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) \text{ et } \left(x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[\right) \\
& \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, -1[\cup \left]-1, -\frac{3}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[
\end{aligned}$$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-2x} + x - 1.$$

1. Par croissance (stricte) du logarithme,

$$e^{-2x} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -2x < -\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{\ln(2)}{2}.$$

2. f est dérivable de dérivée

$$f'(x) = -2\,e^{-2x} + 1.$$

De plus,

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\,e^{-2x} + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2x} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{\ln(2)}{2}.$$

f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{\ln(2)}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{\ln(2)}{2}, +\infty\right[$. De plus,

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

et par croissance comparée on a

$$f(x) = e^{-2x}\left(1 + xe^{2x}\right) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On calcule également

$$f\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) = \frac{1 + \ln(2)}{2} - 1 = \frac{\ln(2) - 1}{2} < 0 \quad \text{car } \ln(2) < \ln(e) = 1.$$

3. f est continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{\ln(2)}{2}\right]$ à valeurs dans $\left[\dfrac{\ln(2)-1}{2}, +\infty\right[$. Comme $0 \in \left[\dfrac{\ln(2)-1}{2}, +\infty\right[$, d'après le théorème de la bijection monotone, f s'annule donc une unique fois sur $\left[\dfrac{\ln(2)-1}{2}, +\infty\right[$.

On applique de même le théorème de la bijection monotone sur l'intervalle $\left[\dfrac{\ln(2)}{2}, +\infty\right[$.

f s'annule donc deux fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

1. On a facilement

$$u_1 = \frac{2}{7} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{4}{15}.$$

2. Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "u_n *existe et* $u_n > 0$".
<u>Initialisation :</u> u_0 existe et est bien strictement positif. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence u_n existe et $u_n > 0$ alors $(n+3)u_n + 1 > 0$, et en particulier il est non nul. Donc u_{n+1} existe et comme $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{(n+3)u_n + 1} > 0$, comme quotient de deux réels strictement positifs. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

3. Pour tout entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{(n+3)u_n + 1}{2u_n} = \frac{1}{2}\left(n+3+\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{2}(n+3+v_n).$$

4. Pour tout entier naturel n, on a

$$w_{n+1} = v_{n+1} - (n+1) - 1 = \frac{1}{2}(n+3+v_n) - (n+1) - 1 = \frac{1}{2}(-n-1+v_n) = \frac{1}{2}w_n.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

5. D'après la question précédente,

$$w_n = w_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme $v_n = w_n + n + 1$, on trouve

$$v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + n + 1.$$

Comme $u_n = \frac{1}{v_n}$, on a

$$u_n = \frac{1}{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + n + 1}.$$

6. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Ainsi par somme et quotient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

7. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} v_k &= \sum_{k=0}^{n}\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^k + k + 1\right) = 3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= 3\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = 6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+2)(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 6.

1. (a) On a

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(1+k) - \ln(k).$$

Donc $a = 1$ et $b = -1$ conviennent.

(b) Donc

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n}\ln(1+k) - \ln(k) = \sum_{k=2}^{n}\ln(1+k) - \sum_{k=2}^{n}\ln(k) \\
&= \sum_{i=3}^{n+1}\ln(i) - \sum_{k=2}^{n}\ln(k) \text{ (on réindexe par } i = k+1, \text{ les indices de 3 à } n \text{ sont communs)} \\
&= \sum_{i=3}^{n}\ln(i) + \ln(n+1) - \sum_{k=3}^{n}\ln(k) - \ln(2) = \ln\left(\frac{n+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

2. (a) Soit $g(x) = x - \ln(1+x)$. g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ en tant que somme de fonctions usuelles dérivables car si $x > -1$ alors $1+x > 0$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad \text{sur }]0,+\infty]$$

Or $g(0) = 0$ donc $g(x) \geq 0$ sur $[0,+\infty[$. Finalement $x - \ln(1+x) \geq 0$ et $\ln(1+x) \leq x$ sur $[0,+\infty[$.

(b) Comme pôur tout $k \geq 2, 1/k > 0$ alors

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

en sommant on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Donc pour tout $n \geq 2$,

$$S_n \leq T_n.$$

Or $S_n = \ln\left(\frac{n+1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc par comparaison,

$$T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(c) Et comme $T_n \geq \ln\left(\frac{n+1}{2}\right)$, si on a $\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) > 100$ alors $T_n > 100$. De plus

$$\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) > 100 \iff \frac{n+1}{2} > e^{100} \iff n > 2\,e^{100} - 1.$$

En prenant pour n la partie entière de $2\,e^{100}$, on aura $T_n > 100$.