Mathématiques

Corrigé du DS n°3

Exercice 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = \exp(u_n) - 1.$$

On pose la fonction f définie par

$$f(x) = e^x - 1.$$

1. On étudie les variations de la différence : soit $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$g(x) = f(x) - x = e^x - 1 - x.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$.

x	0
$e^x - 1$	- 0 +
$g(x)$	↘ ↗ + 0 +

Donc l'équation $f(x) = x$ a une unique solution qui est 0 et $f(x) - x > 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. On suppose que $u_0 = 1$.

(a) On montre par récurrence que pour tout entier n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : " $1 \leq u_n \leq u_{n+1}$ ".

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = e - 1 > 1$ car $e > 2$. Donc $1 \leq u_0 \leq u_{0+1}$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et 1, u_n et u_{n+1} en sont éléments alors

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$

et comme $f(1) = e - 1 > 1$ alors $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$ et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1}$.

(b) Pour montrer que (u_n) n'est pas majorée on raisonne par l'absurde :

Si (u_n) est majorée, alors comme elle est croissante, elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone. Soit ℓ sa limite. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ elle est continue en ℓ et

$$f(\ell) = \ell.$$

D'après la question 1, la seule solution étant $\ell = 0$. Mais comme pour tout entier n : $1 \leq u_n$ alors par passage à la limite, $1 \leq \ell = 0$. Ce qui est absurde. Donc (u_n) n'est pas majorée et comme elle est croissante, elle tend vers $+\infty$.

(c) On étudie les variations de la différence : soit $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$g(x) = f(x) - (e - 1) \cdot x = e^x - 1 - (e - 1) \cdot x.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - e + 1$.

x	1	$+\infty$
$e^x - e + 1$	1	+
g	0	↗

Donc si $x \geq 1$ alors $f(x) \geq (e - 1)x$.

(d) On montre alors par récurrence que pour tout entier n , $u_n \geq (e - 1)^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : " $u_n \geq (e - 1)^n$ ".

Initialisation : $u_0 = 1$ et $(e - 1)^0 = 1$ donc $u_0 \geq (e - 1)^0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et u_n et $(e - 1)^n$ en sont éléments donc

$$f(u_n) \geq f((e - 1)^n)$$

et comme $(e - 1)^n \geq 1$ alors $f((e - 1)^n) \geq (e - 1)(e - 1)^n$ donc

$$u_{n+1} \geq (e - 1)^{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout entier n , $u_n \geq (e - 1)^n$.

Et comme $e - 1 > 1$ alors $(e - 1)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et par comparaison $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

3. On suppose ici que $u_0 < 0$.

(a) On montre par récurrence que pour tout entier n , $u_n < 0$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : " $u_n < 0$ ".

Initialisation : $u_0 < 0$ par définition. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et u_n et 0 en sont éléments. Donc

$$u_{n+1} = f(u_n) < f(0) = 0.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout entier n , $u_n < 0$

(b) Pour tout $x < 0$, on a $f(x) > x$ donc comme $u_n < 0$ alors $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$.

Donc (u_n) est croissante et comme elle est majorée par 0 alors elle est convergente. Soit ℓ sa limite. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue en ℓ et $f(\ell) = \ell$. La seule solution est $\ell = 0$.

Donc (u_n) converge vers 0.

Exercice 2.

1. (a) Les boules de l'urne sont équiprobables donc

$$\mathbb{P}(N_1) = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B_1) = \frac{5}{8}$$

(b) Calculons $\mathbb{P}_{B_1}(N_2)$. Si B_1 se réalise, il reste alors 4 boules blanches. Les boules restantes étant équiprobables,

$$\mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \frac{3}{7}.$$

(c) On a

$$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}.$$

(d) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements (N_1, B_1) ainsi

$$\mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}(N_1) \mathbb{P}_{N_1}(N_2) + \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{8}$$

Ce que l'on aurait pu trouver en constatant que toutes les boules du départ sont équiprobables.

2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des deux tirages.

(a) $[X = 0]$ se réalise lorsque l'on n'a obtenu que des boules noires, ainsi

$$[X = 0] = N_1 \cap N_2,$$

donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(N_1) \cdot \mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

(b) De même,

$$[X = 2] = B_1 \cap B_2,$$

donc

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

d'où comme $([X = 0], [X = 1], [X = 2])$ est un système complet d'événements, alors

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 2) = 1 - \frac{3}{28} - \frac{5}{14} = \frac{13}{28}.$$

(c) On peut écrire la loi de X

i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = i)$	3/28	15/28	10/28

Le nombre moyen de boules blanches obtenues est donc

$$E(X) = 0 + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{10}{28} = \frac{35}{28}$$

Exercice 3.

Partie 1

1. On peut écrire

```
n=eval(input('n=?'))
v=0
for k in range(1,n+1) :
    v=v+1/k
print(v)
```

2. f est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables. De plus, pour $x > 1$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = \frac{x(x-1) - x^2 + (x-1)}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x^2(x-1)}$$

On en déduit que f est décroissante sur $]1, +\infty[$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors pour $x > 1$, on a

$$\ln(x) - \ln(x-1) - \frac{1}{x} > 0.$$

On en déduit facilement que pour $k > 1$, *Conclusion* : $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.

3. L'inégalité précédente n'est vraie que pour $k \geq 2$ et donc

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \text{ pour avoir } k > 1$$

Ainsi

$$v_n \leq 1 + \sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1))$$

On reconnaît une somme télescopique

$$\sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1)) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \ln(n) + 1$.

Partie 2

1. On peut écrire

```
n=eval(input('n=?'))
u=1
for k in range(1,n+1) :
    u=u+1/u
print(u)
```

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " u_n est défini et strictement positif."

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Alors $u_n + \frac{1}{u_n}$ est bien défini car $u_n \neq 0$ et est strictement positif. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est donc défini et strictement positif.

- (b) On a donc pour tout entier $n : u_{n+1} > u_n$ car $1/u_n > 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.
3. (a) On a

$$u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2} - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$$

- (b) On a d'une part :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_0^2 = u_n^2 - 1, \quad \text{la somme est télescopique}$$

et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{u_k^2}\right) = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

donc $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$

(c) Or $1/u_k^2 \geq 0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \geq 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \geq 2n + 1$.

Finalement, comme $2n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, par minoration $u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc $u_n = |u_n| = \sqrt{u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

4. (a) On veut majorer $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ et pour cela, il faut minorer $\frac{1}{u_k^2}$.

Pour tout $k : u_k^2 \geq 2k + 1 > 2k$ donc $\frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k}$ si $k > 0$ (si $k \geq 1$) le terme pour $k = 0$ est donc à garder à part.

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2}v_{n-1}$ si $n - 1 \geq 1$ i.e. $n \geq 2$

D'où

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 2n + 1 + 1 + \frac{1}{2}v_{n-1}$$

Conclusion : $u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$

(b) Et comme $v_n \leq 1 + \ln(n)$ pour tout entier $n \geq 2$, on a donc $v_{n-1} \leq 1 + \ln(n - 1)$

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1 + \ln(n - 1)}{2} = 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n - 1)}{2}.$$

(c) On a alors l'encadrement :

$$2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n - 1)}{2}$$

et comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2n + 1} &\leq u_n \leq \sqrt{2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n - 1)}{2}} \\ \sqrt{2n} \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} &\leq u_n \leq \sqrt{2n} \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n - 1)}{4n}} \\ \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} &\leq \frac{u_n}{\sqrt{2n}} \leq \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n - 1)}{4n}} \end{aligned}$$

et comme $\frac{\ln(n - 1)}{4n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors

$$1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n - 1)}{4n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

$$1 + \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

par encadrement,

$$\frac{u_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Exercice 4.

Partie 1. Un jeu en ligne.

La société Leazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Les positionnements sont déterminés par l'ensemble (sans ordre) des 3 positions distinctes parmi 9.

Conclusion : Il y a donc $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$ positionnements possibles.

2. (H) est formé de 3 positionnements : ligne 1, 2 ou 3, les positionnements étant équiprobables donc $\mathbb{P}(H) = \frac{3}{84}$

(V) est formé de 3 positionnements : colonne A, B ou C, donc $\mathbb{P}(V) = \frac{3}{84}$

(D) comporte 2 diagonales : donc $\mathbb{P}(D) = \frac{2}{84}$

3. (H, V, D, N) étant un système complet d'événements,

$$\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(D) = 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

(a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{\text{ème}}$ relance.

Lors de la $i^{\text{ème}}$ relance, la société peut gagner 2 euros ou en perdre 18 sinon.

Donc la variable aléatoire Z_i a pour univers image $Z_i(\Omega) = \{2, -18\}$. La loi de Z_i est

$$\mathbb{P}(Z_i = 2) = \mathbb{P}(N) = \frac{19}{21} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z_i = -18) = \frac{2}{21}$$

donc

$$E(Z_i) = 2\mathbb{P}(Z_i = 2) - 18\mathbb{P}(Z_i = -18) = 2\frac{19}{21} - 18\frac{2}{21} = \frac{38 - 36}{21} = \frac{2}{21}$$

Conclusion : $E(Z_i) = \frac{2}{21} \simeq 0,1$

(b) Le gain journalier Z est la somme des gains à chaque relance donc

$$Z = \sum_{i=1}^{10000} Z_i \quad \text{donc} \quad E(Z) = 10000 \frac{2}{21} \simeq 1000$$

Conclusion : En moyenne, la société gagnera approximativement 1000 euros par jour.

Partie 2. Cas de joueurs invétérés.

1. Un Joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.

(a) X est le nombre de parties gagnées en 100 parties indépendantes, la probabilité de gagner chacune étant de $\frac{2}{21}$. On effectue ainsi 100 expériences indépendantes avec une probabilité de succès de $\frac{2}{21}$, ainsi

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(100, \frac{2}{21}\right)$

(b) On peut donc facilement conclure que

$$\text{Conclusion : } E(X) = \frac{200}{21} \text{ et } V(X) = \frac{2}{21} \frac{19}{21} 100 = \frac{200 \cdot 19}{21^2}$$

(c) En 100 parties effectuées, X sont gagnées (gain de $18X$ euros) et $100 - X$ perdues (perte de $2(100 - X)$ euros). La perte totale est donc $T = 2(100 - X) - 18X = 200 - 20X$.

$$\text{Conclusion : } T = 200 - 20X$$

On peut compter différemment : il mise 200 euros et reçoit 20 euros par partie gagnée donc $20X$ euros.

2. Avec n parties au lieu de 100, on a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{2}{21})$. On considère l'événement

$$U = \ll \text{gagner au moins une partie} \gg$$

U est l'événement contraire de $[X = 0]$, or

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{2}{21}\right)^0 \left(\frac{19}{21}\right)^n = \left(\frac{19}{21}\right)^n$$

Donc $\mathbb{P}(U) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n$. Déterminons le plus petit n pour lequel $\mathbb{P}(U) \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \geq \frac{1}{2} &\iff \left(\frac{19}{21}\right)^n \leq \frac{1}{2} \\ &\iff n \ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq -\ln(2) \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff n \geq \frac{-\ln(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \simeq \frac{0,7}{0,1} \text{ car } \ln\left(\frac{19}{21}\right) < 0 \end{aligned}$$

Conclusion : Il faut jouer au moins 7 ou 8 parties pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure à 50%

Partie 3. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est dérégulée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est dérégulée » et on pose $\mathbb{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Sachant Δ , les positions sont déterminées par la seule combinaison des 2 autres positions parmi les 8 restantes.

Il y a donc $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ positionnements possibles et équiprobables.

H est à présent réduit à la ligne 1, V à la colonne A et D à la diagonale descendante.

$$\text{Conclusion : } \mathbb{P}_\Delta(H) = \mathbb{P}_\Delta(V) = \mathbb{P}_\Delta(D) = \frac{1}{28}$$

2. Avec la question précédente, on a donc $\mathbb{P}_\Delta(N) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$.

Sachant $\bar{\Delta}$, l'expérience se fait dans les conditions de la partie I (le premier jeton est placé aléatoirement) et les probabilités sont donc celle de la partie I :

$$\mathbb{P}_{\bar{\Delta}}(N) = \frac{19}{21}$$

$(\Delta, \bar{\Delta})$ est un système complet d'événement donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N) &= \mathbb{P}_{\bar{\Delta}}(N) \cdot \mathbb{P}(\bar{\Delta}) + \mathbb{P}_\Delta(N) \cdot \mathbb{P}(\Delta) \\ &= x \frac{25}{28} + (1-x) \frac{19}{21} \\ &= x \frac{25}{4 \cdot 7} + (1-x) \frac{19}{3 \cdot 7} \\ &= \frac{25 \cdot 3 - 19 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 7} x + \frac{19}{21} \\ &= -\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \end{aligned}$$

Conclusion : La probabilité que les jetons ne soient pas alignés est égale à $\mathbb{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. La variable aléatoire G a pour univers image $G(\Omega) = \{-18, 2\}$. La loi de G est donnée par

$$\mathbb{P}(G = 2) = \mathbb{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(G = -18) = \mathbb{P}(\bar{N}) = 1 - \mathbb{P}(N) = 1 + \frac{x}{84} - \frac{19}{21}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(G) &= 2\mathbb{P}(G = 2) - 18\mathbb{P}(G = -18) \\ &= 2\left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right) - 18\left(1 + \frac{x}{84} - \frac{19}{21}\right) \\ &= -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$E(G) > 0 \iff -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} > 0 \iff x < \frac{2 \cdot 84}{21 \cdot 20} = \frac{2}{5}$$

Conclusion : Le gain moyen est positif si, et seulement si $x < \frac{2}{5}$.

4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Sachant $\bar{N}$, on cherche à connaître avec quelle probabilité la fonction aléatoire a été dérégulée. On cherche donc à calculer $\mathbb{P}_{\bar{N}}(\Delta)$. D'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\bar{N}}(\Delta) &= \frac{\mathbb{P}(\Delta \cap \bar{N})}{\mathbb{P}(\bar{N})} = \frac{\mathbb{P}(\Delta) \mathbb{P}_{\Delta}(\bar{N})}{\mathbb{P}(\bar{N})} \\ &= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{1 - \left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right)} = \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{\frac{2}{21} + \frac{x}{84}} = \frac{9x}{x + 8} \end{aligned}$$

Conclusion : Si les jetons sont alignés, la fonction aléatoire a été dérégulée avec une probabilité $\frac{9x}{x + 8}$.