

Mathématiques

Corrigé du DS n°4

Exercice 1.

1. w est une composée de fonctions dérivables plusieurs fois sur $\mathbb{R}$, ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{-x^2} \\ w'(x) &= -2x e^{-x^2} \\ w''(x) &= -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2} \\ w'''(x) &= 8x e^{-x^2} + (4x^2 - 2)(-2x) e^{-x^2} = (-8x^3 + 12x) e^{-x^2} \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H_1(x) &= -e^{x^2} (-2x e^{-x^2}) = 2x \\ H_2(x) &= e^{x^2} ((4x^2 - 2)e^{-x^2}) = 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= -e^{x^2} ((-8x^3 + 12x)e^{-x^2}) = 8x^3 - 12x \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2 \text{ et } H_3(x) = 8x^3 - 12x.$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$$

En dérivant on obtient :

$$H'_n(x) = (-1)^n (2x) e^{x^2} w^{(n)}(x) + (-1)^n e^{x^2} w^{(n+1)}(x) = 2x H_n(x) - (-1)^{n+1} e^{x^2} w^{(n+1)}(x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$H'_n(x) = 2x H_n(x) - H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - H'_n(x)$$

$\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N} \text{ et pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - H'_n(x).$

3. Raisonnons par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: " H_n est un polynôme de degré n ."

Initialisation : $\forall x \in \mathbb{R}, H_0(x) = 1$.

$\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - H'_n(x)$$

$x \mapsto 2x, H_n$ et H'_n sont des polynômes. Ainsi H_{n+1} est un polynôme.

D'après l'hypothèse de récurrence, H_n est un polynôme de degré n donc $x \mapsto 2x H_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ et H'_n est un polynôme de degré strictement inférieur à n .

Par conséquent H_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$.

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, H_n \text{ est un polynôme de degré } n.$

4. Soit x un réel.

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x H_0(x) - H'_0(x) = 2x.$$

$$H_2(x) = 2x H_1(x) - H'_1(x) = 2x(2x) - 2 = 4x^2 - 2.$$

$$H_3(x) = 2x H_2(x) - H'_2(x) = 2x(4x^2 - 2) - 8x = 8x^3 - 12x.$$

$$H_4(x) = 2x H_3(x) - H'_3(x) = 2x(8x^3 - 12x) - (24x^2 - 12) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

Nous avons ainsi retrouvé les résultats de la question 1. De plus :

$\forall x \in \mathbb{R}, H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$

5. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons a_n le coefficient du terme de plus haut degré de H_n .

On a $a_0 = 1$ car $H_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, le terme de plus haut degré de H_n est $a_n x^n$. Ainsi le terme de plus haut degré de $x \mapsto 2x H_n$ est $2a_n x^{n+1}$. De plus H'_n est un polynôme de degré strictement inférieur à n .

Le terme de plus haut degré de $x \mapsto 2x H_n - H'_n$, donc de H_{n+1} , est alors $2a_n x^{n+1}$. Ainsi

$$a_{n+1} = 2a_n.$$

(a_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2^n.$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n est 2^n .

6. On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, w(-x) = w(x).$$

Une récurrence simple (non rédigée dans ce corrigé) donne alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$(-1)^n w^{(n)}(-x) = w^{(n)}(x).$$

Ainsi

$$(-1)^n (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(-x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$$

Donc

$$(-1)^n H_n(-x) = H_n(x).$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$H_n(-x) = (-1)^{2n} H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si n est pair $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_n(-x) = H_n(x)$ et H_n est paire.

Si n est impair $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_n(-x) = -H_n(x)$ et H_n est impaire.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, H_n a la parité de n .

Exercice 2.

1. ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} ch(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x) \\ sh(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -sh(x) \end{aligned}$$

Donc ch est paire et sh est impaire.

2. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonction usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$sh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ et comme sh est impaire, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} sh(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sh	$-\infty$	0	$+\infty$

On a donc $sh > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $sh < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et nulle en 0.

3. La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection monotone, sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

4. ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$ch'(x) = sh(x).$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} ch(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow +\infty$. Comme ch est paire, on en déduit les variations de ch :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ch'(x)$	$-$	0	$+$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

5. Pour montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $ch(x) > sh(x)$, on calcule la différence :

$$ch(x) - sh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^{-x}}{2} > 0$$

Donc pour tout réel x : $ch(x) > sh(x)$

6. Il convient de respecter les symétries, les positions relatives et de donner la tangente en 0 (seul point particulier).

De plus, $sh'(0) = ch(0) = 1$

7. f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \neq 0$:

$$f(-x) = \frac{-x}{sh(-x)} = \frac{-x}{-sh(x)} = f(x)$$

et $f(-0) = 1 = f(0)$ donc f est paire.

8. On a alors quand $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x}{sh(x)} = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{2x}{e^{-x}(e^{2x} - 1)} = \frac{1}{e^{-x}} \frac{2x}{e^{2x} - 1}$$

or $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ (limite usuelle), donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1$$

ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0),$$

donc f est continue en 0.

9. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de fonctions dérivables avec $sh(x) \neq 0$ et pour $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{sh(x) - xch(x)}{sh(x)^2} = \frac{h(x)}{sh(x)^2}$$

10. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = ch(x) - (ch(x) + xsh(x)) = -xsh(x)$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} - x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{2} \left(\frac{1 - e^{-2x}}{x} - 1 - e^{-2x} \right) = -\infty$$

et comme h est impaire, en $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
h	$+\infty$		0		$-\infty$

11. D'où finalement le sens de variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 0 & \nearrow & \searrow & 0 \end{array} $		

Par croissance comparée, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{sh(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = 0.$$

On a donc une asymptote horizontale en $+\infty$ et par symétrie en $-\infty$.

Exercice 3.

Partie I : Exemples

1. On a

$$\min_{i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket} \frac{1}{i} = \min \left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \frac{1}{9} \right\} = \frac{1}{9}.$$

2. On a

$$\min_{i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket} \frac{(-1)^i}{i+1} = \min \left\{ 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4} \right\} = -\frac{1}{2}$$

Partie II : Limite inférieure d'une suite

1. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs.

(a) On a pour $(n; k) \in \mathbb{N}^2$, $\{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k \rrbracket\} \subseteq \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k+1 \rrbracket\}$, donc

$$u_n(k) = \min_{i \in \llbracket n; n+k \rrbracket} x_i = \min \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k \rrbracket\} \geq u_n(k+1)$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (u_n(k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}.$

(b) $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est décroissante minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

$$\boxed{u_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k)}$$

(c) Soit $(n; k) \in \mathbb{N}^2$, $\{x_j \mid j \in \llbracket n+1; n+k+1 \rrbracket\} \subseteq \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k+1 \rrbracket\}$, donc

$$u_{n+1}(k) = \min \{x_j \mid j \in \llbracket n+1; n+k+1 \rrbracket\} \geq \min \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k+1 \rrbracket\} = u_n(k+1)$$

donc comme $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est décroissante,

$$u_{n+1}(k) \geq u_n(k+1) \geq u_n$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(k) \geq u_n$, en passant à la limite $u_{n+1} \geq u_n$, donc $\boxed{(u_n)_{n \geq 0} \text{ est croissante}}.$

(d) $(u_n)_{n \geq 0}$ étant croissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite (qui peut être $+\infty$).

$$\boxed{\text{La limite inférieure de la suite } (x_n)_{n \geq 0} \text{ est } \liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n) \text{ avec } \liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{i \in \llbracket n; +\infty \rrbracket} (x_i) \right)}$$

2. $(y_n)_{n \geq 0}$ et $(z_n)_{n \geq 0}$ sont les suites réelles positives définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = 1 + (-1)^n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

(a) i. Cas de $(y_n)_{n \geq 0}$. On a $v_n(0) = 1 + (-1)^n = y_n$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $v_n(k) = 0$,

ii. Cas de $(z_n)_{n \geq 0}$. On a $w_n(0) = z_n$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $w_n(k) = 2$ si $n \geq 2$ et 1 sinon.

(b) On en déduit alors que $v_n = 0$ et $w_n = 2$. Donc $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (y_n) = 0$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (z_n) = 2$

3. (a) $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante positive convergente, on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$u_n(k) = \min \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k \rrbracket\} = x_n$$

donc

$$u_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_n = \ell,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ c'est à-dire $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \ell$.

(b) $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante positive convergente, on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$u_n(k) = \min \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k \rrbracket\} = x_{n+k}$$

donc

$$u_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n+k} = \ell,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ c'est à-dire $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \ell$.

(c) i. Comme $\{\alpha_i \mid i \in \llbracket 1; r \rrbracket\}$ est fini, il existe $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ tel que

$$\alpha_j = \min \{\alpha_i \mid i \in \llbracket 1; r \rrbracket\}$$

Donc comme $\alpha_j \in I$, alors $\boxed{\min_{i \in \llbracket 1; r \rrbracket} \alpha_i \in I}$

ii. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels positifs convergente vers ℓ réel positif, $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ . On rappelle la définition de la limite d'une suite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, |x_k - \ell| \leq \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on a $\forall k \in \llbracket n; +\infty \rrbracket$,

$$\ell - \varepsilon \leq x_k \leq \ell + \varepsilon$$

donc d'après la question précédente

$$\ell - \varepsilon \leq \inf_{k \in \llbracket n; +\infty \rrbracket} x_k \leq \ell + \varepsilon$$

ainsi

$$\ell - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n) \leq \ell + \varepsilon$$

ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on déduit que $\boxed{\liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \ell}$.

Partie III : Limite inférieure d'une fonction

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}_+$, f est continue sur $[x; x+h]$, f atteint son minimum sur $[x; x+h]$ d'après le théorème des bornes.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall h \geq 0, \quad \varphi_x(h) = \min_{u \in [x; x+h]} f(u).$$

2. Si $0 \leq h \leq t$,

$$\{f(u) \mid u \in [x; x+h]\} \subseteq \{f(u) \mid u \in [x; x+t]\}$$

donc

$$\min \{f(u) \mid u \in [x; x+h]\} \geq \min \{f(u) \mid u \in [x; x+t]\}$$

soit

$$\varphi_x(h) \geq \varphi_x(t)$$

d'où $\boxed{\varphi_x \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

3. φ_x est décroissante minorée par 0 donc admet une limite finie en $+\infty$ (théorème de la limite monotone).

$$\boxed{\Phi_x = \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi_x(h)}$$

4. Si $0 \leq x \leq t$, on a

$$\{f(u) \mid u \in [x; +\infty[\} \supseteq \{f(u) \mid u \in [t; +\infty[\}$$

donc

$$\Phi_x = \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi_x(h) = \min \{f(u) \mid u \in [x; +\infty[\} \leq \min \{f(u) \mid u \in [t; +\infty[\} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi_t(h) = \Phi_t$$

d'où $\boxed{x \mapsto \Phi_x \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$

5. $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_x$ existe.

Cette limite est dite **limite inférieure de la fonction** f et est notée $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\inf_{u \in [x; +\infty[} f(u) \right)$$

6. Soit g la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ appartient à } [0; 1] \\ 2 - x & \text{si } x \text{ appartient à } [1; 2] \end{cases}$$

et telle que pour $x \geq 0$, $g(x) = g(x + 2)$ (g est 2-périodique).

- (a) Représentation graphique de g sur le segment $[0; 4]$. C'est une fonction chapeau centrée en 1 et 2-périodique.
(b) Le minimum de g sur un intervalle de longueur une période 2, vaut 0 donc si $x \geq 0$ et $h \geq 2$,

$$\varphi_x(h) = 0.$$

- (c) $\Phi_x = \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi_x(h) = 0$ donc

$$0 = \lim_{h \rightarrow +\infty} \Phi_x = \liminf_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

7. Soit f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on reprend les notations des questions 1 et 3

- (a) Soit $x \geq 0$ pour $h \geq 0$, on a

$$f(x) \geq \min \{f(u) \mid u \in [x; x + h]\} = \varphi_x(h).$$

- (b) En faisant tendre h vers $+\infty$, on obtient alors

$$f(x) \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi_x(h) = \Phi_x$$

$$\text{donc } \boxed{\forall x \in [0; +\infty[, f(x) \geq \Phi_x}.$$

- (c) On suppose que $\ell = \liminf_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) > 0$, c'est à dire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_x = \ell > 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0; +\infty[, |\Phi_x - \ell| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\Phi_x \geq \ell - \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$, on obtient bien avec la question précédente

$$f(x) \geq \Phi_x \geq \ell - \varepsilon = \varepsilon.$$

$$\boxed{\text{Si } \ell = \liminf_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) > 0, \text{ pour } \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0, \text{ il existe } x_0 > 0 \text{ tel que } \forall x \in [x_0; +\infty[, f(x) \geq \Phi_x \geq \varepsilon}.$$

8. Soient f et h deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que pour $x \geq 0$,

$$f(x) \geq h(x)$$

et $\liminf_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ où ℓ est un réel positif.

On a

$$\min \{h(u) \mid u \in [x; +\infty[\} \leq \min \{f(u) \mid u \in [t; +\infty[\}$$

et donc

$$\ell = \liminf_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\min \{h(u) \mid u \in [x; +\infty[\}) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (\min \{f(u) \mid u \in [t; +\infty[\}) = \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\boxed{\text{alors } \liminf_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) \geq \ell}$$