Mathématiques
Corrigé du DS n°5

Exercice 1.

On considère l'application φ défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

1. On a

$$\varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x} - x\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

On a donc une branche parabolique verticale en $+\infty$.

2. φ est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues. De plus, par croissance comparée en 0, on a

$$\varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1 = \varphi(0)$$

φ est continue en 0.
Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$

3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$, on a

$$\varphi'(x) = -2x\ln(x) - \frac{x^2}{x} = -x(2\ln(x) + 1)$$

4. En 0, on calcule le taux d'accroissement : pour $x > 0$

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = -x\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \text{par croissance comparée.}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en 0 et } \varphi'(0) = 0. \text{ Sa courbe a un tangente horizontale en 0.}}$

5. On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$2\ln(x) + 1$		$-$	0	$+$	
$-x$		$-$		$-$	
$\varphi'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	1	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{2e}$	$\searrow$	$-\infty$

6. φ est strictement positive sur $[0, 1/\sqrt{e}]$, il n'y a donc pas de solution à $\varphi(x) = 0$ sur cet intervalle.
φ est continue et strictement décroissante sur $]1/\sqrt{e}, +\infty[$ dans $]-\infty, 1 + 1/(2e)[$. D'après le théorème de la bijection monotone, φ est bijective de $]1/\sqrt{e}, +\infty[$ dans $]-\infty, 1 + 1/(2e)[$. Comme $0 \in]-\infty, 1 + 1/(2e)[$, il existe une unique solution α à $\varphi(x) = 0$. De plus,

$$\varphi\left(\sqrt{2}\right) = 1 - 2\ln\left(\sqrt{2}\right) = 1 - \ln(2) > 0 \quad \text{et } \varphi(2) = 1 - 4\ln(2) < 0$$

$$\varphi(2) < \varphi(\alpha) < \varphi\left(\sqrt{2}\right).$$

Comme φ est strictement décroissante sur $]1/\sqrt{e}, +\infty[$ et que $\sqrt{2}$, α et 2 en sont éléments, on obtient

$$\sqrt{2} < \alpha < 2.$$

Conclusion : $\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha \text{ tel que } \varphi(\alpha) = 0 \text{ et } \sqrt{2} < \alpha < 2.}$

7. On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $a_0 = \sqrt{2}$ et $b_0 = 2$.

$$\forall n \geq 0, \quad \text{si} \quad \varphi(a_n)\,\varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \quad \text{alors} \quad a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$\forall n \geq 0, \quad \text{si} \quad \varphi(a_n)\varphi\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0 \quad \text{alors} \quad a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n$$

On reconnait dans ce programme la méthode de dichotomie.

Pour écrire un programme en Python calculant a_7 et b_7, il y a simplement à suivre la définition mathématique donnée, en plaçant les termes successifs des suites a et b dans `a` et `b` , les réaffectations pour $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = b_n$ étant inutiles.

```
import numpy as np
def phi(x):
    return 1-x**2*np.log(x)
a=np.sqrt(2)
b=2
for k in range(1,8):
    t=(a+b)/2
    if phi(a)*phi(t)<0:
        b=t
    else :
        a=t
print(a)
print(b)
```

Exercice 2.

1. $e^x - e^{-x} > 0 \iff e^x\left(e^{2x}-1\right) > 0$ et comme $x \mapsto e^{2x}-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et nulle en 0 :

$$e^x - e^{-x} > 0 \iff x > 0.$$

Donc $D = \mathbb{R}_+^*$.

On définit la fonction f par :

$$\forall x \in D,\ f(x) = \ln\left(e^x - e^{-x}\right).$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} > 0$$

De plus, $\ln(e^x - e^{-x}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ et en $\ln(e^x - e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

f est strictement croissante sur D.

(b) Comme f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $D =]0, +\infty[$, elle est bijective de D dans $]\lim_0 f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$.

Et comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

On résout :

$$\begin{aligned} \ln\left(e^x - e^{-x}\right) = 0 &\iff e^x - e^{-x} = 1 \iff e^{2x} - 1 = e^x \\ &\iff e^{2x} - e^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

On pose $X = e^x$. L'équation $X^2 - X - 1 = 0$ du second degré a pour racines : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$.

Donc l'unique solution est $\alpha = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

(c) La pente vaut : $f'(\alpha) = \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}$ et comme $e^\alpha - e^{-\alpha} = 1$, il reste :

$$e^\alpha + e^{-\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}+4}{2\left(1+\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} = \frac{-4\sqrt{5}}{-4} = \sqrt{5}.$$

Donc le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.

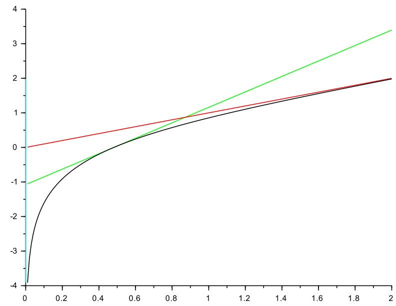
3. (a) On factorise par e^x dans le ln

$$f(x) - x = \ln\left(e^x\left(1 - e^{-2x}\right)\right) - x = x + \ln\left(1 - e^{-2x}\right) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) On a donc une asymptote d'équation $y = x$ en $+\infty$.

(c) Comme $f(x) - x = \ln\left(1 - e^{-2x}\right) < 0$ car $1 - e^{-2x} < 1$, alors la courbe de f est en dessous de l'asymptote.

4. Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer les droites (Δ) et (T).



Exercice 3.

I. Etude d'exemples.

1. $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est positive car ses coefficients sont des réels positifs ou nuls.

$$U - AU = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0.$$

Ainsi U est une matrice (strictement) positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice $U - AU$ soit strictement positive.

Ceci achève de montrer que $\boxed{A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est productive.}}$

2. Notons que $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice positive de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$P - BP = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + 4y + z \\ 2x + y + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y - z \\ -2x - 3z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le dernier coefficient de $P - BP$ est nul donc cette matrice n'est pas strictement positive. Ainsi il n'existe pas de matrice positive P de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - BP$ soit strictement positive.

$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ n'est pas productive.}}$

II. Caractérisation des matrices positives.

1. On suppose que la matrice $M = (m_{i,j})$ est positive. Alors $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ m_{i,j} \geq 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall i \in \mathbb{N}, x_i \geq 0$.

Posons $Y = MX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in \mathbb{N}, y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j$.

Comme $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ m_{i,j} \geq 0$ et $\forall j \in \mathbb{N},\ x_j \geq 0$: $\forall i \in \mathbb{N},\ y_i \geq 0$. $Y = MX$ est positive. Ainsi :

$\boxed{\text{Si } M \text{ est une matrice positive de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{, pour toute matrice positive } X \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{, le produit } MX \text{ est positif.}}$

2. Réciproquement supposons que pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif. Montrons que M est positive.

Fixons j dans $\mathbb{N}$. Soit $E_j = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ le j-ème élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad u_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

E_j est donc une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc, par hypothèse, ME_j est une matrice positive. Redémontrons que ME_j est la j-ème colonne de M.

Posons $ME_j = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

$$\forall i \in \mathbb{N}, v_i = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\, u_k = m_{i,j}\, u_j = m_{i,j}.$$

Nous retrouvons bien le fait que ME_j est la j-ème colonne de M. Comme ME_j est positive, alors

$$\forall i \in \mathbb{N},\ m_{i,j} \geq 0.$$

Ceci étant vrai pour tout élément j de $\mathbb{N}$ on a alors $\forall j \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N},\ m_{i,j} \geq 0$. M est donc positive.

$\boxed{\text{Si } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que, pour toute matrice positive } X \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ le produit } MX \text{ est positif alors } M \text{ est positive.}}$

Conclusion : *Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,*

$$M \textit{ est positive si et seulement si } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \geq 0 \Rightarrow MX \geq 0.$$

III. Caractérisation des matrices productives.

1. (a) Posons $W = AP = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors $P - AP = \begin{pmatrix} p_1 - w_1 \\ p_2 - w_2 \\ \vdots \\ p_n - w_n \end{pmatrix}$.

Par hypothèse $P - AP > 0$ donc $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i - w_i > 0$. Ainsi : $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i > w_i$.
A est productive, donc A est positive. De plus, P est une matrice positive.
D'après la question **II.1**), $W = AP$ est donc positive.
Alors $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i > w_i \geq 0$ donc $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i > 0$. Finalement : $\boxed{P \text{ est strictement positive.}}$

(b) $X \geq AX$ donc $\forall i \in \mathbb{N},\ x_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j$. En particulier $x_k \geq \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, x_j$. On a alors

$$0 \leq x_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, x_j = c\, p_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j, \qquad \text{car } x_k = c\, p_k.$$

Or $\forall j \in \mathbb{N},\ \dfrac{x_j}{p_j} \geq c,\ a_{k,j} \geq 0$ et $p_j \geq 0$ donc $\forall j \in \mathbb{N},\ \dfrac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j \geq c\, a_{k,j}\, p_j$. En sommant, on obtient

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j \leq -c \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j$$

$$c\, p_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j \leq c\, p_k - c \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j$$

$$c\, p_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j \leq c \left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j \right).$$

Or $0 \leq c\, p_k - \sum_{j=1}^{n} \dfrac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j$, donc $0 \leq c \left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j \right)$.

$P - AP$ est strictement positive donc tous ses coefficients sont strictement positifs.

Le coefficient de la k-ème ligne de $P - AP$ est $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j$ et est donc strictement positif.

Comme $0 \le c \left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j \right)$, on en conclut que $\boxed{c \text{ est positif ou nul.}}$

$\forall i \in \mathbb{N},\ \dfrac{x_i}{p_i} \ge c \ge 0$ et comme $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i > 0$ (car P est strictement positive), on a

$$\forall i \in \mathbb{N},\ x_i \ge 0.$$

$\boxed{X \text{ est positive.}}$

(c) $X = AX$ donc nécessairement $-X = A(-X)$. Le tout permet de dire que $X \ge AX$ et $-X \ge A(-X)$. Alors ce qui précède montre que X et $-X$ sont des matrices positives. Par conséquent $\boxed{X \text{ est nulle.}}$

(d) Soit X une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = (I_n - A)^{-1}X$ et montrons que cette matrice est positive.
$0 \le X = (I_n - A)Y = Y - AY$ donc $Y \ge AY$. D'après la question **III.1.b.**, Y est positive.
$\boxed{\text{Pour toute matrice positive } X \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ la matrice } Y = (I_n - A)^{-1}X \text{ est positive.}}$
Ce qui précède indique que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \ge 0 \Rightarrow (I_n - A)^{-1}X \ge 0$. La question **II.2.** permet alors de dire que :
$\boxed{(I_n - A)^{-1} \text{ est positive.}}$

2. (a) $V = (I_n - B)^{-1}U$ donc $V - BV = (I_n - B)\,V = U$.
$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ étant strictement positive, alors on a $\boxed{V - BV > 0}$.

(b) $(I_n - M)(I_n + 2\,M) = I_n + 2M - M - 2\,M^2 = I_n + 2M - M - M = I_n$.
Alors $I_n - M$ est inversible et son inverse est $I_n + 2\,M$.

M étant positive il en est de même de $I_n + 2\,M = (I_n - M)^{-1}$. De plus, en considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ strictement positive, d'après la question **II.1.**, $V = (I_n - M)^{-1}U \ge 0$.
D'après la question **III.2.(a)**, on en conclut que $V - MV > 0$.
M est une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il existe V une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $V - MV > 0$.
$\boxed{M \text{ est productive.}}$