

Mathématiques
Devoir surveillé n°6
Mars 2024

Durée de l'épreuve : 2h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Questions de cours

Tous les théorèmes et les propriétés doivent être énoncés avec leurs hypothèses précises.

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 6, rappeler les résultats suivants

a) $\forall q \in \mathbb{R}, \sum_{k=6}^n q^k$

b) $\sum_{k=4}^n k$

2. Donner la définition avec des quantificateurs de la convergence d'une suite vers un réel l .
3. Donner la définition des suites adjacentes, puis donner les propriétés des suites adjacentes.
4. Énoncer le théorème de Rolle.
5. Donner la définition du degré d'un polynôme.
6. Donner la définition d'un système complet d'événements.
7. Donner la formule des probabilités totales.

8. Soient X une variable aléatoire finie et $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une application, énoncer le théorème de transfert.

9. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, donner la condition pour que AB existe.

Dans ce cas $C = AB$ et on pose $C = (c_{i,j})$, préciser la valeur de $c_{i,j}$ et pour quels i et j .

10. Soit E un espace vectoriel, rappeler les points à démontrer pour que F soit un sous espace vectoriel de E .

11. Donner une base de chacun des espaces vectoriels ci-dessous (sans justification, les calculs peuvent être faits au brouillon) :

(a) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 10x - 6y = 0 \end{cases} \right\}.$

(b) $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } -2x + y - 5z = 0 \right\}.$

Exercice 1.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3 , puis vérifier :

$$A^3 = A^2 + 2A.$$

2. Montrer que la famille (A, A^2) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un unique couple (a_n, b_n) de nombres réels tel que :

$$A^n = a_n A + b_n A^2,$$

et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

4. Écrire un programme en *Python* qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n donné supérieur ou égal à 1.
5. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$

- (b) En déduire a_n et b_n en fonction de n , pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
(c) Donner l'expression de A^n en fonction de A , A^2 et n , pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 2.

1. Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$ est définie pour tout réel x .

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$$

2. Etablir que f est impaire.
3. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
(b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x , et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x + 1) - \ln(x + 1) \leq f(x) \leq \ln(2)$$

- (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(c) Dresser le tableau de variation complet de f .
(d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout réel x , on a : $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
(b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
(c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.
6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
(a) Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1} (1 + \sqrt{t^2 + 1})} dt.$$

- (b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$$

- (c) Conclure que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1.$$

- (d) Montrer que l'on a aussi :

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 1.$$