

Mathématiques

Corrigé du DS n°7

Questions de cours

Tous les théorèmes et les propriétés doivent être énoncés avec leurs hypothèses précises.

1. Donner la définition d'une fonction injective.

Soit $f : E \rightarrow F$. On dit que f est injective si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

2. Donner la définition avec des quantificateurs de " $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ".

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]0, \eta[, f(x) \geq A.$$

3. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

Soient $n \in \mathbb{N}$, et f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, on a pour $x \in I$ et $x_0 \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

5. Soit P un polynôme, donner deux propositions équivalentes à " x_0 est racine d'ordre n de P ".

" x_0 est racine d'ordre n de P " est équivalent à " $(X - x_0)^n$ divise P mais $(X - x_0)^{n+1}$ ne divise pas P ".

C'est également équivalent à " $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P^{(k)}(x_0) = 0$ et $P^{(n)}(x_0) \neq 0$ ".

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, définir la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Donner son espérance et sa variance.

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Exercice 1.

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

1. On a $u_0 = 1 + \frac{1}{2^0} = 2$ et $u_1 = \left(1 + \frac{1}{2^0}\right) \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$ et $u_2 = \left(1 + \frac{1}{2^0}\right) \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$.

2. (a) On a $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n + \frac{1}{2^{n+1}} u_n \geq u_n$ car $u_n \geq 0$ donc la suite est croissante et comme $u_0 = 2$

Conclusion : $u_n \geq 2$.

- (b) $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \geq u_n$

Conclusion : La suite (u_n) est croissante

- (c) Soit $g(x) = \ln(1+x) - x$.

g est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Donc $g(x) \leq 0$ et

Conclusion : $\boxed{\forall x > -1, \text{ on a : } \ln(1+x) \leq x.}$

(d) Comme produit de termes strictement positifs, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

Et comme $1 + \frac{1}{2^k} > -1$, d'après la question précédente on a $\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$ et

$$\sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \leq 2}$

3. Comme $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on a donc $u_n \leq e^2$.

La suite est croissante et majorée par e^2 (et minorée par 2), elle converge vers une limite $\ell \in [2, e^2]$.

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

(a) Comme $\ell > 0$ alors $x \mapsto \ln(x)$ est continue en ℓ donc $\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell)$.

Or $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ donc $\sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell)$.

Ce qui signifie que la série $\sum_{k \geq 0} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ converge et que

Conclusion : $\boxed{\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}$

(b) Comme u_n et ℓ sont strictement positifs,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

(c) Et comme $\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$ alors pour N un entier naturel strictement supérieur à n

$$\sum_{k=n+1}^N \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{2^k}.$$

Or $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{2^k}$ converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Donc lorsque N tend vers $+\infty$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}.}$

(d) On a vu que la suite (u_n) était croissante donc $\ell - u_n \geq 0$, montrons que $\ell - u_n \leq \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell - u_n - \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right) = -u_n + \ell e^{-\frac{1}{2^n}}$$

Or $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ donc par croissance de la fonction exponentielle

$$\frac{\ell}{u_n} \leq e^{\frac{1}{2^n}} \Leftrightarrow \ell - u_n e^{\frac{1}{2^n}} \leq 0 \Leftrightarrow (-u_n + \ell e^{-\frac{1}{2^n}}) e^{\frac{1}{2^n}} \leq 0$$

Finalement $\ell - u_n - \ell(1 - e^{-1/2^n}) \leq 0$ et

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1 - e^{-1/2^n})$.

(e) Soit $g(x) = 1 - e^{-x} - x$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^{-x} - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{-x} - 1$		$+$	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Donc $g(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a $1 - e^{-x} \leq x$.

En particulier pour $x = \frac{1}{2^n}$, on a $1 - e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}$ et finalement

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.

Comme la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente, alors d'après le critère de comparaison par inégalité,

Conclusion : la série de terme général $(\ell - u_n)$ est également convergente.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(1) = 1 \text{ et } f(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\ln(x)}{2} \text{ si } x \neq 1.$$

1. $x \mapsto f(x)$ est continue en tout x tel que $x \neq 1$ et $x > 0$ donc sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Vérifions la continuité en 1.

Pour $x \neq 1$, on pose $h = x - 1$. On a

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\ln(x)}{2} = \frac{h+2}{h} \cdot \frac{\ln(1+h)}{2}$$

Or $\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$ donc

$$\frac{\ln(1+h)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$$

ainsi $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} 1 = f(1)$. Donc f est bien continue en 1. Finalement f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

2. f est dérivable sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln(x)}{2x(x-1)^2} = -\frac{\ln(x) - \frac{x^2-1}{2x}}{(x-1)^2}$$

Soit $g(x) = \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x}$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x^2 - (x^2 - 1)}{2x^2} = \frac{2x - x^2 - 1}{2x^2} = \frac{-(x-1)^2}{2x^2} < 0.$$

Donc

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

Donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1[$.

3. Pour tout x strictement positif et différent de 1, la dérivée f' de f vérifie :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln(x)}{2x(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - 2x \ln(x) - (x-1)^2}{2x(x-1)^2} = \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$$

4. (a) Donnons le développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

(b) On calcule la limite du taux d'accroissement en 1. Soit $x \neq 1$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\ln(x)}{2} - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)\ln(x) - 2(x-1)}{2(x-1)^2}$$

On étudie le comportement de ce taux d'accroissement au voisinage de 1. Si on pose $x = 1 + t$, lorsque t est au voisinage de 0, x est au voisinage de 1, ainsi

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x+1)\ln(x) - 2(x-1)}{2(x-1)^2} = \frac{(2+t)\ln(1+t) - 2t}{2t^2}$$

Or lorsque t est au voisinage de 0

$$\begin{aligned} \frac{(2+t)\ln(1+t) - 2t}{2t^2} &\underset{0}{=} \frac{(2+t)\left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - 2t}{2t^2} \\ &\underset{0}{=} \frac{2t - t^2 + t^2 + o(t^2) - 2t}{2t^2} \\ &\underset{0}{=} \frac{o(t^2)}{2t^2} \end{aligned}$$

Or, par définition, $\frac{o(t^2)}{2t^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$, ainsi on peut en conclure que

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} 0 = f'(1)$$

Par conséquent, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

(c) f' est continue sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Déterminons la continuité de f' en 1.

$$f'(x) = \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$$

On pose $x = 1 + t$, ainsi

$$\frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x} = \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} - \frac{1}{2(1+t)}$$

Or lorsque t est au voisinage de 0

$$\frac{t - \ln(1+t)}{t^2} - \frac{1}{2(1+t)} \underset{0}{=} \frac{t - \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)}{t^2} - \frac{1}{2(1+t)} \underset{0}{=} \frac{1}{2} + o(1) - \frac{1}{2(1+t)}$$

Or, par définition, $o(1) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ et $1 + t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$, donc $f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} 0 = f'(1)$. f' est continue en 1.

Par conséquent, f' est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Donc f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

5. (a) Soit $g(x) = \ln(x) - (x-1)$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

x	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Donc pour tout $x > 1$, on a : $g(x) < 0$ et $\ln(x) < (x-1)$.

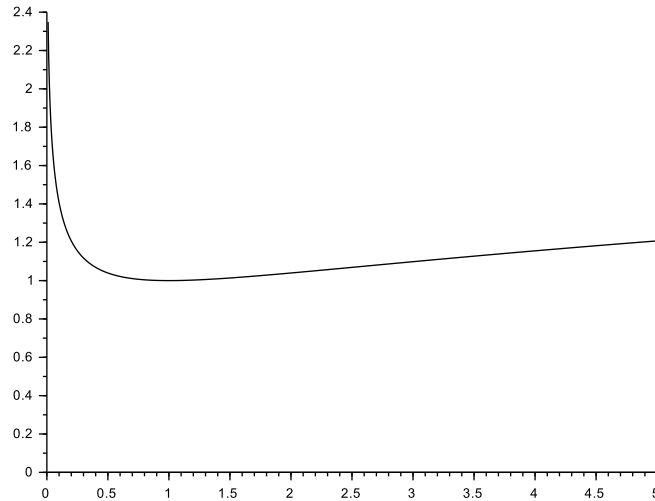
(b) Si $x > 1$, alors $\frac{x+1}{x-1} > 0$ et donc

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\ln(x)}{2} < \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2}$$

or pour $x > 1$, $\frac{x+1}{2} < \frac{x+x}{2} = x$, donc $f(x) < x$.

Donc pour tout $x > 1$ on a : $f(x) < x$.

6. On a la représentation graphique de f suivante



Exercice 3.

On admet que si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$$

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$$

On remarque que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " $0 \leq u_n < 1$."

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 < 1$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n < 1$

alors $f(0) \leq f(u_n) < f(1)$ car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1$, $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n < 1$

- (b) On détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} \\ &= \frac{(u_n - 1)^2}{2} > 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

- (c) La suite est donc croissante et majorée par 1.

Elle converge donc vers une limite ℓ .

Et par passage à la limite dans l'inégalité, $0 \leq \ell \leq 1$

f est continue sur $[0, 1]$, donc en ℓ . Ainsi $f(\ell) = \ell$ soit $\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2} \iff \ell = 1$

2. Pour tout entier n on pose $v_n = 1 - u_n$

(a) On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{1-\frac{u_n^2+1}{2}} - \frac{1}{1-u_n} \\ &= \frac{2}{1-u_n^2} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{2-(1+u_n)}{1-u_n^2} \\ &= \frac{1-u_n}{1-u_n^2} = \frac{1}{1+u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}}$

(b) On a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1^-$ donc $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$ et $\frac{1}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. De plus,

$$\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} \right) ..$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} \right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_n} - 1 \right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} \frac{1}{v_n} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{n} \frac{1}{v_n} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}}$

(c) On a donc $v_n = \frac{2}{n} (1 + \varepsilon(n))$ avec $\varepsilon(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$u_n = 1 - v_n = 1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n} \varepsilon(n)$$

donc

$$u_n \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. (a)

```
import numpy as np
n=eval(input('n=?'))
u=0
for k in range(1,n+1):
    u=(u**2+1)/2
print(u)
print(b)
```

(b) k compte le nombre de fois que l'on passe dans la boucle :

```
import numpy as np
k=0
u=0
while 1-u > 10**(-3):
    u=k+1
print(k)
```

Le résultat sera 1991.

Exercice 4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = x - n \ln(x).$$

1. (a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$, on a

$$f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x - n}{x}$$

En $+\infty$ on a $f_n(x) = x(1 - n \ln(x)/x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ car $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$.

En 0 on a $x - n \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ car $n > 0$.

x	0	n	$+\infty$
$x - n$	—	0	+
$f'_n(x)$	—	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow \quad n(1 - \ln(n)) \quad \nearrow$	$+\infty$

(b) Pour $n \geq 3$, on a

$$f_n(n) = n(1 - \ln(n)) < 0 \quad \text{car pour } n \geq 3 > e \text{ on a } \ln(n) > 1.$$

f_n est continue et strictement décroissante sur $]0, n[$ dans $]f_n(n), +\infty[$, d'après le théorème de la bijection monotone, f_n est bijective de $]0, n[$ dans $]f_n(n), +\infty[$.

Comme $f_n(n) = n(1 - \ln(n)) < 0$, alors $0 \in]f_n(n), +\infty[$. Donc l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $]0, n[$ notée u_n .

De même, il y a une unique solution v_n sur l'intervalle $]n, +\infty[$ donc $n < v_n$.

Conclusion : Pour $n \geq 3$, il existe u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

(a) On calcule les images par f_n de 1, u_n et e :

$$f_n(1) = 1 - n \ln(1) = 1$$

$$f_n(u_n) = 0$$

$$f_n(e) = e - n \ln(e) = e - n < 0 \text{ car } n \geq 3 > e$$

On a donc

$$f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$$

or f_n est strictement décroissante sur $]0, n[$ et 1, u_n et e en sont éléments (car $e < n$) alors

Conclusion : $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$

(b) On a

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n \ln(u_{n+1})$$

On sait que u_{n+1} vérifie

$$f_{n+1}(u_{n+1}) = u_{n+1} - (n+1) \ln(u_{n+1}) = u_{n+1} - n \ln(u_{n+1}) - \ln(u_{n+1}) = 0$$

Conclusion : $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$

Pour avoir $u_n \geq u_{n+1}$ on compare les images par f_n :

$$f_n(u_n) = 0$$

$$f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}) \geq 0 \text{ car } u_{n+1} \geq 1$$

Donc

$$f_n(u_n) \leq f_n(u_{n+1})$$

or f_n est strictement décroissante sur $]0, n[$ et u_n et u_{n+1} en sont éléments (car $u_{n+1} < e < n$) alors :

Conclusion : $\forall n \geq 3, u_n \geq u_{n+1}$ et la suite est décroissante.

(c) La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est donc décroissante et minorée par 1 donc convergente vers $\ell \geq 1$.

Remarque : Pour encadrer $\ln(u_n)$ on peut partir de $1 < u_n < e$ d'où $0 < \ln(u_n) < 1$, cependant cela n'est pas suffisant pour avoir un encadrement plus précis de la limite.

On va chercher à encadrer $\ln(u_n)$ ainsi : comme

$$f_n(u_n) = u_n - n \ln(u_n) = 0$$

donc

$$\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$$

or pour $n \geq 3$, $1 < u_n < e$, donc

$$\frac{1}{n} < \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} < \frac{e}{n}$$

Donc par encadrement,

$$\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

or comme $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a

$$u_n = e^{\ln(u_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$$

(d) On observe que

$$\frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = \frac{\ln(1 + (u_n - 1))}{u_n - 1}$$

or comme $u_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors

$$\ln(1 + (u_n - 1)) \underset{+\infty}{\sim} u_n - 1$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1.}$

On calcule la limite du quotient de $u_n - 1$ et $\frac{1}{n}$ en faisant apparaître le quotient précédent :

$$\frac{u_n - 1}{1/n} = n(u_n - 1) = \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} n \ln(u_n)$$

or comme $f_n(u_n) = u_n - n \ln(u_n) = 0$, on a $n \ln(u_n) = u_n$, donc

$$\frac{u_n - 1}{1/n} = \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} u_n$$

de plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, on a donc

$$\frac{u_n - 1}{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Conclusion : $\boxed{u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

3. Étude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$

(a) Comme $n < v_n$, par minoration on a

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.}$

(b) Comme $n \geq 3$, on a $n \ln(n) > 0$, ainsi

$$\begin{aligned} f_n(n \ln(n)) &= n \ln(n) - n \ln(n \ln(n)) \\ &= n \ln(n) - n [\ln(n) + \ln(\ln(n))] \\ &= -n \ln(\ln(n)) \end{aligned}$$

or comme $n > e$, alors $\ln(n) > 1$ et donc $\ln(\ln(n)) > 0$ (car $x \mapsto \ln(x)$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$).

$$f_n(n \ln(n)) < 0.$$

Comme $f_n(v_n) = 0$, on a donc

$$f_n(n \ln(n)) < f_n(v_n).$$

Comme f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$ et que $n \ln(n)$ et v_n en sont éléments (comme $\ln(n) \geq 1$, $n \ln(n) \geq n$) alors

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 3, n \ln(n) < v_n}$

(c) Soit g la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = x - 2 \ln(x)$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$, on a

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$$

x	0	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		$\searrow$ 2 - 2 ln(2)	$\nearrow$

Comme $2 < e$, alors $\ln(2) < 1$, donc

$$g(2) = 2 - 2 \ln(2) = 2(1 - \ln(2)) > 0$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$g(x) > 0.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) > 0$ et $n > 2 \ln(n)$

(d) Comme $n \geq 3$, on a $n \ln(n) > 0$, ainsi

$$\begin{aligned} f_n(2n \ln(n)) &= 2n \ln(n) - n \ln(2n \ln(n)) \\ &= n[2 \ln(n) - \ln(2) - \ln(n) - \ln(\ln(n))] \\ &= n[\ln(n) - \ln(2 \ln(n))] \end{aligned}$$

or comme $n > 2 \ln(n)$, alors $\ln(n) > \ln(2 \ln(n))$ (car $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$f_n(2n \ln(n)) > 0.$$

D'après la question 3.(b), on a donc

$$f_n(n \ln(n)) < f_n(v_n) < f_n(2n \ln(n)).$$

Comme f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$ et que $n \ln(n) (n \ln(n) \geq n)$ v_n et $2n \ln(n)$ en sont éléments alors

Conclusion : $\forall n \geq 3, n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$

(e) Pour $n \geq 3$, on a alors

$$n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$$

or comme $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors

$$\ln(n \ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(2n \ln(n))$$

$$\ln(n) + \ln(\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(n) + \ln(2) + \ln(\ln(n))$$

et en divisant par $\ln(n) > 0$ pour faire apparaître le quotient :

$$1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} < \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} < 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$$

or comme $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$, en substituant par $x = \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a $\ln(\ln(n)) \underset{+\infty}{=} o(\ln(n))$, donc

$$1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Donc par encadrement,

$$\frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Conclusion : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$