

Problème 1

1) $Y = X + 1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ car X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k - 1) = (1 - p)^{k-1} p$$

Donc $Y = X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p .

2) On en déduit que Y admet une espérance et une variance.

Par linéarité de l'espérance et propriété de la variance, $X = Y - 1$ admet aussi une espérance et une variance et :

$$E(X) = E(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y) = \frac{q}{p^2}$$

3) import numpy as np

import numpy.random as rd

def simule_X(p):

Y = 1 # on fait un premier essai

while rd.rand() > p : # tant qu'on a un échec de probabilité q = 1-p

Y = Y + 1 # on fait un essai supplémentaire

return Y - 1

4) def simule_Z(n, p):

Z = 1 # on commence la partie avec un seul jeton

for i in range(n): # on va activer n fois la machine

s = 0 # la machine n'a pas encore rendu de jetons

for j in range(Z): # on introduit un jeton Z fois car on a commencé cette étape avec Z jetons

s = s + simul_X(p) # on ajoute les jetons rendus à chaque fois à notre capital

Z = s # le nombre total de jetons obtenus sera le nombre initial pour l'étape suivante

return Z

5)a) $u_0 = P(Z_0 = 0) = 0$ car $Z_0 = 1$

$$u_1 = P(Z_1 = 0) = P(X = 0) = (1 - p)^0 p \quad \text{donc} \quad u_1 = p$$

b) Si $(Z_n = 0)$ est réalisé, alors le joueur n'a plus de jetons après n activations. Il est donc certain qu'il n'en aura pas non plus après l'activation suivante de la machine et que $(Z_{n+1} = 0)$ est aussi réalisé.

$$\text{Donc } (Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0) \quad \text{et} \quad u_n = P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0) = u_{n+1}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Comme cette suite de probabilités est bien sûr aussi majorée par 1, le théorème de convergence monotone prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

$$6) \quad R = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (Z_n = 0) \quad \text{Il y a un moment où le joueur n'a plus de jetons.}$$

On a vu au 5)b) que la suite $(Z_n = 0)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements.

$$\text{D'après la propriété de limite monotone : } P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (Z_n = 0)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{donc} \quad P(R) = L$$

7)a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Sachant que $Z_1 = k$, le joueur possède k jetons après la première activation.

Il n'en aura plus aucun après la 2^{ème} activation si et seulement si chacune des k variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_k$ a pris la valeur 0 et ne lui pas rendu de jeton. Par indépendance de ces VA, on a donc :

$$P_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = P(X_1 = 0 \cap \dots \cap X_k = 0) = P(X_1 = 0) \dots P(X_k = 0) = p \dots p = p^k$$

$$\text{Comme } u_1 = p, \text{ on a bien montré que } P_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = (u_1)^k$$

Remarque : La formule admise par l'énoncé suit le même raisonnement mais il faut que chacun des k jetons obtenus lors de la première activation n'en redonne plus aucun après n nouvelles activations de la machine (ce qui se produit avec une probabilité $u_n = P(Z_n = 0)$)

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événements $(Z_1 = k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$P(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k) P_{(Z_1=k)}(Z_{n+1} = 0) \quad \text{c'est-à-dire, d'après l'énoncé,} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k)(u_n)^k$$

Alors $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)(u_n)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p(u_n)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p(qu_n)^k$ donc $u_{n+1} = \frac{p}{1-qu_n}$ (somme d'une série géométrique convergente de 1^{er} terme p et de raison $-1 < qu_n < 1$ produit de 2 probabilités)

8a) On sait que $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe. On peut donc passer à la limite dans le résultat du 7)b).

$$L = \frac{p}{1-qL} \Leftrightarrow L(1-qL) = p \Leftrightarrow L - qL^2 = p \Leftrightarrow qL^2 - L + p = 0$$

On vérifie que $(L-1)(qL-p) = qL^2 - pL - qL + p = qL^2 - L + p$ car $p+q=1$. On a bien $(L-1)(qL-p) = 0$

b) D'après 6), $P(R) = L$ et d'après le 8)a), soit $L = 1$, soit $L = \frac{p}{q}$ (principe du produit nul).

Si $p \geq \frac{1}{2}$, alors $0 \leq q = 1-p \leq \frac{1}{2}$ et donc $\frac{p}{q} \geq 1$.

$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 1$ (car les probabilités u_n sont majorées par 1) donc la seule valeur possible est $P(R) = L = 1$

c) Si $0 < p < \frac{1}{2}$, alors $q = 1-p > \frac{1}{2}$ et $\frac{p}{q} < 1$

Soit $H(n)$ le prédicat : « $u_n \in \left[0; \frac{p}{q}\right]$ »

Initialisation : $u_0 = 0 \in \left[0; \frac{p}{q}\right]$ donc $H(0)$ est vrai.

Hérédité : Supposons $H(n)$ vrai pour $n \in \mathbb{N}$ donné.

Par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq \frac{p}{q}$ donc $0 \geq -qu_n \geq -p$ car $-q < 0$

Puis $1 \geq 1-qu_n \geq 1-p > 0$ et $1 \leq \frac{1}{1-qu_n} \leq \frac{1}{1-p}$ car la fonction inverse décroît sur $]0; +\infty[$

Enfin $p \leq \frac{p}{1-qu_n} \leq \frac{p}{1-p}$ car $p > 0$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{p}{q}$ et $H(n+1)$ est vrai

Conclusion : Le prédicat est vrai au rang 0 et héréditaire. Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0; \frac{p}{q}\right]$

On en déduit, par passage à la limite, que $L \in \left[0; \frac{p}{q}\right]$ et donc la valeur $L = 1$ n'est plus possible.

La seule valeur possible est donc $P(R) = L = \frac{p}{q}$

d) Le casino préfère que $p = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ car il veut être certain que le joueur perd tous ses jetons s'il joue suffisamment longtemps.

9) L'événement $(T \leq n)$ signifie que le joueur a perdu tous ses jetons lors de l'une des n premières activations de la machine, c'est-à-dire qu'il n'a plus de jetons après les n premières activations. C'est donc aussi l'événement $(Z_n = 0)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(T \leq n) = P(Z_n = 0) = u_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme T ne prend que des valeurs entières : $P(T = n) = P(T \leq n) - P(T \leq n-1)$

D'après le résultat précédent et par définition : $P(T = n) = u_n - u_{n-1} = 1 - v_n - (1 - v_{n-1})$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T = n) = v_{n-1} - v_n$

10) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
$$\sum_{n=1}^N nP(T=n) = \sum_{n=1}^N n(v_{n-1} - v_n) = \sum_{n=1}^N nv_{n-1} - \sum_{n=1}^N nv_n = \sum_{i=0}^{N-1} (i+1)v_i - \sum_{n=1}^N nv_n$$
 (on pose $i = n-1$)

(linéarité et relation de Chasles)
$$= \sum_{i=0}^{N-1} iv_i + \sum_{i=0}^{N-1} v_i - \sum_{n=1}^N nv_n = \sum_{i=0}^{N-1} iv_i + \sum_{i=0}^{N-1} v_i - \left(0.v_0 + \sum_{n=1}^{N-1} nv_n + Nv_N \right)$$

Donc :
$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N nP(T=n) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} v_n \right) - Nv_N$$
 (car les indices sont muets)

11)a) Soit $H(n)$ le prédicat : « $u_n = \frac{n}{n+1}$ »

Initialisation : $u_0 = 0 = \frac{0}{0+1}$ donc $H(0)$ est vrai.

Hérédité : Supposons $H(n)$ vrai pour $n \in \mathbb{N}$ donné.

D'après 7)b), l'hypothèse de récurrence et sachant que $p = q = \frac{1}{2}$

$$u_{n+1} = \frac{p}{1-qu_n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2} \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2(n+1)-n} = \frac{n+1}{n+2} \quad (\text{en multipliant par } 2(n+1)) \quad \text{et } H(n+1) \text{ est vrai}$$

Conclusion : Le prédicat est vrai au rang 0 et héréditaire. Par principe de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}$$

b) On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - u_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Le 10) s'écrit donc $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N nP(T=n) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} \right) - \frac{N}{N+1}$.

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} = +\infty$ car la série de Riemann à termes positifs $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N}{N+1} = 1$ (plus hauts degrés).

Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N nP(T=n) = +\infty$, ce qui veut dire que la série $\sum_{n \geq 1} nP(T=n)$ diverge et que T n'admet pas d'espérance.

12)a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$w_{n+1} = \frac{1-u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}} = \frac{1 - \frac{p}{1-qu_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1-qu_n}} = \frac{1-qu_n-p}{\frac{p}{q}(1-qu_n)-p} = \frac{q-qu_n}{\frac{p}{q}-pu_n-p} = \frac{q}{p} \times \frac{1-u_n}{\left(\frac{1}{q} - \frac{q}{q}\right) - u_n} = \frac{q}{p} \times \frac{1-u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$$

Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{q}{p} w_n$$

b) La suite $(w_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{q}{p}$ et de premier terme $w_0 = \frac{1-u_0}{p/q - u_0} = \frac{1}{p/q} = \frac{q}{p}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \left(\frac{q}{p} \right)^n = \frac{q}{p} \left(\frac{q}{p} \right)^n = \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}$

$$w_n = \frac{1-u_n}{p/q - u_n} \Leftrightarrow w_n \left(\frac{p}{q} - u_n \right) = 1 - u_n \Leftrightarrow \frac{p}{q} w_n - w_n u_n = 1 - u_n \Leftrightarrow (1 - w_n) u_n = 1 - \frac{p}{q} w_n$$

Comme $p > \frac{1}{2}$, alors $p > q$ et $\frac{p}{q} \neq 1$ et $w_n \neq 1$ et $1 - w_n \neq 0$ ce qui nous permet de diviser

$$u_n = \frac{1 - \frac{p}{q} w_n}{1 - w_n} = \frac{1 - \frac{p}{q} \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}} = \frac{p^{n+1} - pq^n}{p^{n+1} - q^{n+1}}$$

Alors
$$v_n = 1 - u_n = 1 - \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}} - \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{q}{p} \right)^n - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}} = \left(\frac{q}{p} \right)^n \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1}}$$

Comme $p > q > 0$, alors $0 < \frac{q}{p} < 1$ donc $0 < \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} < \frac{q}{p} < 1$ et $1 > 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} > 1 - \frac{q}{p} > 0$.

Cela prouve que $\frac{1 - (q/p)}{1 - (q/p)^{n+1}} \in [0; 1]$ et que $0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$

c) La série géométrique $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{q}{p}\right)^k$ converge car $0 < \frac{q}{p} < 1$. Par comparaison à termes positifs, la série $\sum_{k \geq 0} v_k$ converge.

Si $N \in \mathbb{N}$, $0 \leq N v_N \leq N \left(\frac{q}{p}\right)^N$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} N \left(\frac{q}{p}\right)^N = 0$ par croissances comparées.

Le théorème d'encadrement prouve donc que $\lim_{N \rightarrow +\infty} N v_N = 0$.

D'après le 10), on a donc : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N n P(T=n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N-1} v_n \right) - N v_N = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) - 0 \in \mathbb{R}$

Cela prouve que la série $\sum_{n \geq 1} n P(T=n)$ converge (absolument car ses termes sont positifs).

Donc T admet une espérance et $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

D'après le b), $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{1}{1 - p/q}$ (somme de série géométrique) donc $E(T) \leq \frac{1}{1 - q/p}$

13) Si $p = \frac{1}{2}$, alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N n P(T=n) = +\infty$ et le temps moyen passé par le joueur au casino est « infiniment grand »

Problème 2

A)1)a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f)(x) = \int_0^1 t \cdot 1 dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f)(x) = \int_0^1 t(x-t) dt = \int_0^1 xt - t^2 dt = \left[\frac{x}{2} t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$

Remarque : Les résultats de ces 2 calculs sont confirmés par la question C)4)a)

2)a) On fait le changement de variable affine $u = x - t$ donc $t = x - u$ et $dt = (-1)du = -du$

De plus : $u = x$ quand $t = 0$ et $u = x - 1$ quand $t = 1$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f)(x) = \int_x^{x-1} (x-u)f(u)(-du) = \int_{x-1}^x (x-u)f(u)du$ (le - permet d'échanger les bornes)

Par linéarité, on trouve bien que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f)(x) = x \int_{x-1}^x f(u)du - \int_{x-1}^x u \cdot f(u)du$

b) Notons F une primitive de f et G une primitive de $u \mapsto u \cdot f(u)$ sur $\mathbb{R}$.

Alors F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (en tant que primitives de fonctions continues).

$\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f)(x) = x[F(u)]_{x-1}^x - [G(u)]_{x-1}^x = x(F(x) - F(x-1)) - (G(x) - G(x-1))$

$L(f)$ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations simples sur des fonctions de classe C^1 .

$\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f)'(x) = 1 \cdot (F(x) - F(x-1)) + x \cdot (F'(x) - F'(x-1)) - (G'(x) - G'(x-1))$

$$= [F(u)]_{x-1}^x + x(f(x) - f(x-1)) - (x \cdot f(x) - (x-1)f(x-1))$$

$$= \int_{x-1}^x f(u)du + x \cdot f(x) - x \cdot f(x) - x \cdot f(x-1) + (x-1)f(x-1)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f)'(x) = \int_{x-1}^x f(u)du - f(x-1)$.

3)a) On a vu au 2)b) que L est une application de $C^0(\mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R})$.

Soient $(f, g) \in C^0(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, L(\lambda f + g)(x) = \int_0^1 t(\lambda f + g)(x-t)dt = \lambda \int_0^1 t.f(x-t)dt + \int_0^1 t.g(x-t)dt = \lambda L(f)(x) + L(g)(x)$$

Donc $L(\lambda f + g) = \lambda L(f) + L(g)$ et l'application L est linéaire. C'est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$

b) On a vu au 2)b) que $L(C^0(\mathbb{R})) \subset C^1(\mathbb{R})$ donc $L(C^0(\mathbb{R})) \neq C^0(\mathbb{R})$

L'endomorphisme L n'est donc pas surjectif.

B)1) $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + |x| \geq 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq a(x) = \frac{1}{1+|x|} \leq 1$ et la fonction a est bornée.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $t \in [0;1]$, alors : $0 \leq t.a(x-t) \leq t$

Par croissance et positivité de l'intégrale : $0 \leq L(a)(x) = \int_0^1 t.a(x-t)dt \leq \int_0^1 tdt = \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq b(x) \leq \frac{1}{2}$

2) Si $x \geq 1$, alors $\forall t \in [0;1], x-t \geq 0$ et donc $1+|x-t| = 1+x-t$

On peut donc faire le changement de variable affine (donc de classe C^1) $u = 1+x-t$

$t = 1+x-u$ et $dt = -du$ et $t=0$ ssi $u=1+x$ et $t=1$ ssi $u=x$

$$b(x) = \int_0^1 \frac{t}{1+x-t} dt = \int_{1+x}^x \frac{1+x-u}{u} (-du) = \int_x^{x+1} \frac{1+x}{u} - 1 du = [(1+x)\ln(u) - u]_x^{x+1}$$

$$= (1+x)\ln(x+1) - (x+1) - [(1+x)\ln x - x] \quad \text{et} \quad \forall x \geq 1, b(x) = -1 + (x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

3)a) Première méthode : $\forall x \geq 1, b(x) = -1 + (x+1)[\ln(x+1) - \ln x]$ (forme plus simple à dériver)

$$\forall x \geq 1, b'(x) = 0 + 1 \cdot [\ln(x+1) - \ln x] + (x+1) \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \right] = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + (x+1) \frac{x-(x+1)}{x(x+1)}$$

Donc $\forall x \geq 1, b'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{x}$

Deuxième méthode : D'après A)2)b) : $\forall x \in \mathbb{R}, b'(x) = \int_{x-1}^x a(u)du - a(x-1) = \int_{x-1}^x \frac{1}{1+|u|} du - \frac{1}{1+|x-1|}$

Si $x \geq 1$, alors $x-1 \geq 0$ et $\forall u \in [x-1, x], u \geq 0$ donc

$$b'(x) = \int_{x-1}^x \frac{1}{1+u} du - \frac{1}{1+x-1} = [\ln(1+u)]_{x-1}^x - \frac{1}{x} = \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \forall x \geq 1, b'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

b) Soit $t \geq 0$. $\ln(1+t) = [\ln x]_1^{1+t} = \int_1^{1+t} \frac{1}{x} dx \leq \int_1^{1+t} 1 dx = (1+t) - 1 = t$ donc $\forall t \geq 0, \ln(1+t) \leq t$

(par croissance de l'intégrale car $\frac{1}{x} \leq 1$ si $1 \leq x \leq 1+t$)

On en déduit que $\forall x \geq 1, \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$ donc $b'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \leq 0$ et b est décroissante sur $[1; +\infty[$

4)a) On sait que $\ln(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ donc $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ (car $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$) et $(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x+1}{x}$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = -1 + 1 = 0$

Remarque : Attention à ajouter des **limites** et non des équivalents !

b) On sait que $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t)$

$$\text{Si } x \geq 1 : b(x) = -1 + (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -1 + (x+1) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \boxed{b(x) \sim \frac{1}{2x}}$$

Remarque : Il n'est pas utile d'écrire ici le terme $-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2}$ qui est négligeable devant $\frac{1}{x}$

5) Utilisons A)2)b). Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x-1 \leq 0$ et on coupe l'intégrale en 2 selon le signe de u :

$$b'(x) = \int_{x-1}^x \frac{1}{1+|u|} du - \frac{1}{1+|x-1|} = \int_{x-1}^0 \frac{1}{1-u} du + \int_0^x \frac{1}{1+u} du - \frac{1}{1+1-x} = [-\ln(1-u)]_{x-1}^0 + [\ln(1+u)]_0^x - \frac{1}{2-x}$$

$$= 0 - (-\ln(1-(x-1))) + \ln(1+x) - 0 - \frac{1}{2-x} = \ln(2-x) + \ln(1+x) - \frac{1}{2-x}$$

Donc $\forall x \in [0;1], \quad b'(x) = \ln(2-x) + \ln(1+x) - \frac{1}{2-x}$

6)a) La fonction b' est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$.

$$\forall x \in [0;1], \quad b''(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-2) + (x-2)^2 - (x+1)}{(x+1)(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2 + x^2 - 4x + 4 - x - 1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 6x + 1}{(x+1)(x-2)^2}$$

Le dénominateur est toujours positif sur $[0;1]$. Cherchons le signe du numérateur.

$$\Delta = 36 - 4 \times 2 \times 1 = 28 > 0. \quad \text{Les 2 racines sont } R_1 = \frac{6 - \sqrt{28}}{4} = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \in [0,1] \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} > 1$$

D'où le tableau de variations de b' sur $[0;1]$.

x	0	R_1	x_0	1	R_2
$b''(x)$	+	0	-		0 +
$b'(x)$	$b'(0)$	$b'(R_1)$	$\ominus$	$b'(1)$	

$$b'(0) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0 \quad (\text{car } \ln 2 \approx 0,7) \quad \text{donc } \forall x \in [0; R_1], \quad b'(x) > 0 \quad \text{et il n'est pas nécessaire de calculer } b'(R_1)$$

$b'(1) = \ln 2 - 1 < 0$. Donc b' change de signe sur $[R_1; 1]$. Comme elle y est continue strictement décroissante, le théorème de la bijection monotone prouve que b' **change de signe exactement une fois** sur $[R_1; 1]$ et donc sur $[0;1]$

b) On vient de voir que $\forall x \in [0; x_0], \quad b'(x) \geq 0$ et $\forall x \in [x_0; 1], \quad b'(x) \leq 0$.

Donc la fonction b est croissante sur $[0; x_0]$ et décroissante sur $[x_0; 1]$.

```
c) import numpy as np          # on importe la bibliothèque numpy qui contient la fonction log
x=0                            # on part de 0
while np.log(2-x)+np.log(1+x)+1/(x-2)>0:  # tant que b'(x) reste positif
    x=x+0.01                    # on se décale de 0,01 vers la droite
print(x)                       # on affiche le premier x testé pour lequel b'(x)≤0
```

La valeur x affichée vérifie que $x \geq x_0$ et $x - 0,01 < x_0$ donc elle est comprise entre x_0 et $x_0 + 0,01$.

C)1)a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e_k(x) = e^{kx}$ donc $L(e_k)(x) = \int_0^1 t \cdot e^{k(x-t)} dt = e^{kx} \int_0^1 t \cdot e^{-kt} dt$ car e^{kx} est une constante (la variable est t).

Notons $\lambda_k = \int_0^1 t \cdot e^{-kt} dt \in \mathbb{R}$ (qui ne dépend pas de x). Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad L(e_k)(x) = e^{kx} \int_0^1 t \cdot e^{-t} dt = \lambda_k e_k(x)$

Donc $\boxed{\exists \lambda_k \in \mathbb{R}, L(e_k) = \lambda_k e_k}$

Calculons $\lambda_k = \int_0^1 t \cdot e^{-kt} dt$ à l'aide d'une intégration par parties :

Remarque : Il n'est pas nécessaire de garder e^{kx} dans notre I.P.P.

$u'(t) = e^{-kt}$ et $v(t) = t$ donc $u(t) = -\frac{1}{k} e^{-kt}$ et $v'(t) = 1$ (u et v sont de classe C^1 sur $[0;1]$)

$$\lambda_k = \int_0^1 t \cdot e^{-kt} dt = \left[-\frac{1}{k} e^{-kt} \cdot t \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{k} e^{-kt} \cdot 1 dt = \left[-\frac{1}{k} e^{-kt} \cdot t \right]_0^1 + \frac{1}{k} \int_0^1 e^{-kt} dt = \left[-\frac{1}{k} e^{-kt} \cdot t \right]_0^1 + \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{k} e^{-kt} \right]_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{k} e^{-k} - 0 \right) + \frac{1}{k} \left(-\frac{1}{k} e^{-k} - \left(-\frac{1}{k} \right) \right) = -\frac{1}{k} e^{-k} - \frac{1}{k^2} e^{-k} + \frac{1}{k^2} \text{ et donc } \boxed{\lambda_k = \frac{1 - (k+1)e^{-k}}{k^2}}$$

b) Si $\forall x \in \mathbb{R}, e_k(x) = e^{kx}$, la formule du A)2)b) nous dit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{L(e_k)'(x) = \int_{x-1}^x e^{ku} du - e^{k(x-1)}} = \left[\frac{1}{k} e^{ku} \right]_{x-1}^x - e^{k(x-1)} = \frac{1}{k} e^{kx} - \frac{1}{k} e^{k(x-1)} - e^{k(x-1)} = e^{kx} \left(\frac{1}{k} - \frac{e^{-k}}{k} - e^{-k} \right)$$

Or on sait, d'après le a), que : $\forall x \in \mathbb{R}, L(e_k)(x) = \lambda_k e_k(x) = \lambda_k e^{kx}$ et donc $L(e_k)'(x) = \lambda_k k e^{kx}$

Par conséquent $k \lambda_k = \frac{1}{k} - \frac{e^{-k}}{k} - e^{-k} = \frac{1 - e^{-k} - k e^{-k}}{k}$ et on retrouve que $\boxed{\lambda_k = \frac{1 - (k+1)e^{-k}}{k^2}}$

2)a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + c \cdot e_3 = 0_{C^0(\mathbb{R})}$ c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, a e^x + b e^{2x} + c e^{3x} = 0$

1^{ère} méthode : Le polynôme $aX + bX^2 + cX^3$ a une infinité de racines (tous les réels strictement positifs qui peuvent s'écrire e^x). C'est donc le polynôme nul est ses coefficients sont donc nuls. Alors $a = b = c = 0$

2^{ème} méthode : Si $c \neq 0$, alors $0 = a e^x + b e^{2x} + c e^{3x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} c e^{3x}$ ce qui est absurde et donc nécessairement $c = 0$

Si $a \neq 0$, alors $0 = a e^x + b e^{2x} + c e^{3x} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} a e^x$ ce qui est absurde et donc nécessairement $a = 0$.

Il est alors immédiat qu'on a aussi $b = 0$

3^{ème} méthode : On évalue en donnant 3 valeurs à x (par exemple 0, ln2 et ln3) et on résout un système.

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + 4b + 8c = 0 \\ 3a + 9b + 27c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2b + 6c = 0 \\ 6b + 24c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{matrix} \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2b + 6c = 0 \\ 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Les 3 méthodes prouvent que $\boxed{\text{la famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ est libre.}}$

b) Comme (e_1, e_2, e_3) est libre, on sait par théorème que $\boxed{\dim F = \dim Vect(e_1, e_2, e_3) = Card(e_1, e_2, e_3) = 3}$

On peut aussi dire que (e_1, e_2, e_3) est une base de F (famille libre et génératrice)

c) D'après 1)a) $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L(e_k) = \lambda_k e_k$ c'est-à-dire $\tilde{L}(e_k) - \lambda_k id_F(e_k) = (\tilde{L} - \lambda_k id_F)(e_k) = \vec{0}$

Cela montre que $e_k \in Ker(\tilde{L} - \lambda_k id_F)$

Tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des 3 vecteurs de base (e_1, e_2, e_3) et donc aussi comme une somme d'un élément de $Ker(\tilde{L} - \lambda_1 id_F)$, $Ker(\tilde{L} - \lambda_2 id_F)$ et $Ker(\tilde{L} - \lambda_3 id_F)$.

Donc $\boxed{F = Ker(\tilde{L} - \lambda_1 id_F) + Ker(\tilde{L} - \lambda_2 id_F) + Ker(\tilde{L} - \lambda_3 id_F)}$

(par double inclusion car il est clair que la somme de 3 s.e.v de F est bien sûr aussi incluse dans F)

3)a) Par définition de L, formule du binôme de Newton et linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, L(f)(x) = \int_0^1 t \cdot (x-t)^n dt = \int_0^1 t \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (-t)^{n-k} dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (-1)^{n-k} \int_0^1 t^{n+1-k} dt$$

Comme $\int_0^1 t^{n+1-k} dt = \left[\frac{t^{n+2-k}}{n+2-k} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2-k} - 0$, on a donc $L(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n+2-k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n+2-k} f_k(x)$

Donc
$$L(f_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n+2-k} f_k$$

b) On en déduit que $L(f_n)(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n+2-k} f_k(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n+2-k} \cdot 0^k = \binom{n}{0} \cdot \frac{(-1)^n}{n+2} \cdot 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n+2-k} \cdot 0$

Donc
$$L(f_n)(0) = \frac{(-1)^n}{n+2}$$
 (relation de Chasles : on isole le terme où k=0)

c) D'après A)2)b) : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad L(f_n)'(x) = \left[\int_{x-1}^x u^n du - (x-1)^n \right]' = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{x-1}^x - (x-1)^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} - (x-1)^n$

En primitivant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad L(f_n)(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{(x-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} + C_n$ où $C_n \in \mathbb{R}$

d) Evaluons les deux expressions de $L(f_n)$ en $x=1$. D'après c) : $L(f_n)(1) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - 0 - 0 + C_n$

D'après a) : $L(f_n)(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n+2-k} f_k(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n+2-k} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} \frac{(-1)^j}{j+2} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{j+2}$
(on pose $j = n - k$) (symétrie des coefficients binomiaux)

On en déduit que $\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{n+2} \binom{n}{j} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + C_n$ et il nous reste à trouver C_n

D'après b) et c) $L(f_n)(0) = \frac{(-1)^n}{n+2} = 0 - \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + C_n = \frac{(-1)^n}{n+2} \left[\frac{-1}{n+1} + \frac{n+2}{n+1} \right] + C_n = \frac{(-1)^n}{n+2} + C_n$

Donc on a bien $C_n = 0$ et
$$\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{n+2} \binom{n}{j} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

4)a) On a déjà vu au A)1)a) que $L(f_0) = \frac{1}{2} f_0$ et $L(f_1) = -\frac{1}{3} f_0 + \frac{1}{2} f_1$

On va utiliser le résultat du 3)a) pour $n=2$

$$L(f_2) = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \frac{(-1)^{2-k}}{2+2-k} f_k = \binom{2}{0} \frac{(-1)^{2-0}}{2+2-0} f_0 + \binom{2}{1} \frac{(-1)^{2-1}}{2+2-1} f_1 + \binom{2}{2} \frac{(-1)^{2-2}}{2+2-2} f_2 = \frac{1}{4} f_0 - \frac{2}{3} f_1 + \frac{1}{2} f_2$$

Cela confirme que la matrice de $\hat{L}$ dans la base $B = (f_0, f_1, f_2)$ est bien
$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) La matrice M est triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale donc **M est inversible** (et donc $\hat{L}$ est bijectif).

c) $2M - I = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors
$$(2M - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve enfin que $(2M - I)^3 = 0_3$

Remarque: On dit que $2M - I$ est une matrice nilpotente. C'est le cas de toutes les matrices «plus que triangulaires».

d) D'après la formule du binôme de Newton (que l'on peut utiliser car $2M$ et $(-I)$ commutent) :

$$(2M - I)^3 = (2M)^3 - 3(2M)^2 I + 3(2M) I^2 - I^3 = 8M^3 - 12M^2 + 6M - I$$

Donc $8M^3 - 12M^2 + 6M - I = 0_3$ puis $8M^3 - 12M^2 + 6M = I = (8M^2 - 12M + 6I)M$

On en déduit que $M^{-1} = 8M^2 - 12M + 6I$ et donc aussi $\hat{L}^{-1} = 8\hat{L}^2 - 12\hat{L} + 6id$