Limites et continuité

Table des matières

1 Limites d'une fonction réelle

1.1 L'ensemble $\mathbb{R}$

1.1.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.1 : *Ouverts*

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. L'intervalle $]a, b[$ est dit **ouvert**.

Exemple 1. *Pour a et b deux réels tels que $a \leq b$, les intervalles suivants sont ouverts :*

$$\mathbb{R}, \quad]-\infty, a[, \quad]b, +\infty[, \quad]a, b[, \quad \emptyset.$$

Définition 1.2 : *Fermés*

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. L'intervalle $[a, b]$ est dit **fermé**.

Exemple 2. *Pour a et b deux réels tels que $a \leq b$, les intervalles suivants sont fermés :*

$$\mathbb{R}, \quad]-\infty, a], \quad [b, +\infty[, \quad [a, b], \quad \emptyset.$$

Remarque 1.3 : *Autres intervalles de $\mathbb{R}$*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Les intervalles $]a, b]$ et $[a, b[$ ne sont ni des ouverts, ni des fermés.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les seules parties **connexes** de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les ensembles "d'un seul tenant".

1.1.2 Voisinage

Définition 1.4 : *Voisinage d'un point*

Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage** de a tout intervalle du type

$$V_a =]a - h, a + h[\text{ avec } h > 0.$$

On appelle **voisinage à gauche** de a tout intervalle du type $]a - h, a[$ avec $h > 0$.
On appelle **voisinage à droite** de a tout intervalle du type $]a, a + h[$ avec $h > 0$.

Définition 1.5 : *Propriété locale au voisinage d'un point*

Une proposition $\mathcal{P}(x)$ dépendant de x est dite vraie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ si

$$\exists h > 0, \quad \forall x \in]a - h, a + h[, \quad \mathcal{P}(x) \text{ est vraie .}$$

Exemple 3. *La proposition $\mathcal{P}(x)$ "$x\,(x-3)\,(x+1) < 0$" est vraie au voisinage de 2 car il existe $h = 1 > 0$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour $x \in]2 - h, 2 + h[$.*

Définition 1.6 : *Voisinage de l'infini*

On appelle **voisinage de** $+\infty$ tout intervalle du type

$$V =]A, +\infty[\text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

On appelle **voisinage de** $-\infty$ tout intervalle du type

$$V =]-\infty, A[\text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.7 : *Propriété locale au voisinage de l'infini*

- Une proposition $\mathcal{P}(x)$ dépendant de x est dite vraie au voisinage de $+\infty$ si

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x > A, \quad \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

- Une proposition $\mathcal{P}(x)$ dépendant de x est dite vraie au voisinage de $-\infty$ si

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x < A, \quad \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

Exemple 4. *La proposition $\mathcal{P}(x)$ "$x^2 - x > 0$" est vraie au voisinage de $+\infty$ car il existe $A = 2 > 0$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour $x > A$.*

1.2 Limite d'une fonction en un point et en l'infini

1.2.1 Limite finie en un point

Définition 1.8 : *Limite finie en un point (version voisinage)*

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers la limite l en a lorsque pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage V_a du point a tel que

$$f(V_a) \subset V_l.$$

Intuitivement, $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de l si on prend x assez proche de a. On note alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Ou de manière plus succincte,

$$f \underset{a}{\longrightarrow} l \quad \text{ou} \quad \lim_{a} f = l.$$

Définition 1.9 : *Limite finie en un point (version quantificateurs)*

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers la limite l en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cela revient à prendre dans la définition 1.8 $V_l =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ et $V_a =]a - \eta, a + \eta[$. Cette définition est cependant réservée aux exercices les plus théoriques ou les plus ardus.

Proposition 1.10 : *Unicité de la limite*

Si f admet une limite en a, alors celle-ci est unique.

Démonstration. On suppose que l et l' sont des limites de f en a. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\exists \eta' > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x-a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon.$$

En posant $\eta'' = \min(\eta, \eta')$, on obtient donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta'' > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x-a| < \eta'' \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \text{ et } |f(x) - l'| < \varepsilon.$$

Ainsi

$$|l - l'| = \left|(l - f(x)) + (f(x) - l')\right| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| < 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient bien que $|l - l'| = 0$, d'où $l = l'$. $\square$

Définition 1.11 : *Limite à gauche, limite à droite*

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la limite à gauche de f en a est égale à l lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a - \eta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = l.$$

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à droite du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la limite à droite de f en a est égale à l lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = l.$$

Exemple 5. *Déterminer les limites à gauche et à droite de la fonction partie entière en* 0.

Solution.

Définition 1.12 : *Lien entre limite, limite à droite et limite à gauche*

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
Si f n'est pas définie en a, alors

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Si f est définie en a, alors

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemple 6. *Étudier la limite en* 0 *de l'application* f *définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & si\ x \geq 0, \\ e^{\frac{1}{x}}, & si\ x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Solution.

1.2.2 Limite infinie en un point

Définition 1.13 : *Limite infinie en un point (version voisinage)*

Soit f une fonction définie au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a lorsque pour tout voisinage V de $+\infty$ (resp. $-\infty$), il existe un voisinage V_a du point a tel que

$$f(V_a) \subset V.$$

On prend dans la définition 1.13 précédente :

— $V = [A, +\infty[$ et $V_a =]a-\eta, a+\eta[$ pour que f tende vers $+\infty$ en a,

— $V =]-\infty, A]$ et $V_a =]a-\eta, a+\eta[$ pour que f tende vers $-\infty$ en a.

Définition 1.14 : *Limite infinie en un point (version quantificateurs)*

Soit f une fonction définie au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en a lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A.$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

Généralement, ce type de limites s'observe au niveau d'une valeur interdite de la fonction f.

Exemple 7. *Déterminer la version avec les quantificateurs de la limite vers $-\infty$ en un point.*

Solution.

Définition 1.15 : *Limite infinie à gauche (resp. à droite) en un point*

Soit f une fonction définie sur un voisinage à gauche du point $a \in \mathbb{R}$.

— $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a-\eta < x < a \Rightarrow f(x) > A.$

— $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a-\eta < x < a \Rightarrow f(x) < A.$

Soit f une fonction définie sur un voisinage à droite du point $a \in \mathbb{R}$.

— $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a < x < a+\eta \Rightarrow f(x) > A.$

— $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a < x < a+\eta \Rightarrow f(x) < A.$

Exemple 8. *Montrer en utilisant la définition que :*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Solution.

1.2.3 Limites en l'infini

Définition 1.16 : *Limite finie en $+\infty$*

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que la fonction f tend vers l en $+\infty$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]B, +\infty[\quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$$

Exemple 9. *Déterminer la définition de la limite finie en $-\infty$.*

Solution.

Définition 1.17 : *Limite infinie en $+\infty$*

Soit f une fonction définie au voisinage du point $+\infty$.

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]B, +\infty[\quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A.$

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]B, +\infty[\quad \Rightarrow \quad f(x) \leq A.$

Exemple 10. *Déterminer la définition de la limite infinie en $-\infty$.*

Solution.

1.2.4 Une seule définition pour toutes les limites

On peut remarquer que toutes les limites données précédemment se résument en une seule définition avec la version voisinage.

Définition 1.18 : *Limite en un point de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (hors programme)*

Soient $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que la fonction f tend vers la limite l en a lorsque pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage V_a de a tel que

$$f(V_a) \subset V_l.$$

1.3 Opérations sur les limites

Dans ce paragraphe, a désigne un réel ou l'infini. Ainsi en notant $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. l et l' sont des réels.

Limite d'une somme

$\lim\limits_{a} f$	l	$+\infty$	$-\infty$	l	l	$+\infty$
$\lim\limits_{a} g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{a} (f+g)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminé

Limite d'un produit

$\lim\limits_{a} f$	l	$\pm\infty$	l	0
$\lim\limits_{a} g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{a} (f \times g)$	$l \times l'$	(règles des signes) $\pm\infty$		indéterminé

Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim_a f$	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-
$\lim_a \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Il y a donc plusieurs formes indéterminées :

$$"(+\infty)+(-\infty)", \quad "0\times\infty", \quad "\frac{0}{0}", \quad "\frac{\infty}{\infty}", \quad "1^{\infty}"$$

pour lesquelles on ne sait pas a priori si la fonction converge ou diverge et quelle sera la limite si elle existe.

Remarque 1.19 : *Limites à gauche et à droite*

On a les mêmes résultats pour les limites à gauche et à droite en un point.

1.4 Limites usuelles

Proposition 1.20 : *Limite d'une fonction polynôme ou fraction rationnelle en l'infini*

La limite d'une fonction polynôme en $\pm\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré.
La limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Démonstration. À démontrer en exercice. □

Exemple 11. *Déterminer*

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^5 - x^4 + 10 \qquad et \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-10}{4-3x}.$$

Solution.

Proposition 1.21 : *Croissances comparées*

Soient a et b deux réels strictement positifs.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^a\,(\ln(x))^b = 0$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^a\,e^{bx} = 0$.

De manière mnémotechnique, on peut retenir que l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui elle-même l'emporte sur le logarithme.

Proposition 1.22 : *Limites usuelles venant de taux d'accroissement*

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

(ii) Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

Démonstration. (i), (ii) et (iii) sont des taux d'accroissement en 0. □

Exemple 12. *Montrons que* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$. *On a*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \textit{d'après la proposition précédente.}$$

1.5 Composition de limites

Proposition 1.23 : *Composition de limites*

Soient trois éléments a, b et c de $\overline{\mathbb{R}}$. On considère une fonction f définie au voisinage de a et une fonction g définie au voisinage de b.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to b} g(x) = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

On adapte cette proposition au cas où les limites en jeu sont des limites à gauche ou à droite.

Exemple 13. *Déterminer*

$$\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}.$$

Solution.

1.6 Limites et ordre

Théorème 1.24 : *Théorème de prolongement des inégalités*

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g telles que pour x au voisinage de a

$$f(x) \leq g(x).$$

Alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = l' \quad \Rightarrow \quad l \leq l'.$$

Si on a $f(x) < g(x)$ au lieu de $f(x) \leq g(x)$, la conclusion reste $l \leq l'$: les inégalités strictes deviennent larges après passage à la limite.

Démonstration. Démonstration analogue au théorème similaire dans le chapitre sur les suites. □

Exemple 14. $\forall x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ *et pourtant* $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Il faut déjà savoir que les fonctions convergent avant de passer à la limite.

Théorème 1.25 : *Théorème d'encadrement*

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et trois fonctions f, g et h telles que pour x au voisinage de a

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x\to a} h(x) = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} g(x) = l.$$

Contrairement au théorème 1.24 de prolongement des inégalités où on suppose que les deux fonctions sont convergentes, dans le théorème 1.25 d'encadrement, on suppose que f et h convergent pour prouver la convergence de la fonction encadrée.

Exemple 15. *Déterminer* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$.

Solution.

Corollaire 1.26 : *Théorème d'encadrement avec une valeur absolue*

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g telles que pour x au voisinage de a

$$|f(x) - l| \leq g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Démonstration. Au voisinage de a, $l - g(x) \leq f(x) \leq l + g(x)$. On conclut à l'aide du théorème d'encadrement. □

Théorème 1.27 : *Théorème de comparaison*

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g telles que pour x au voisinage de a

$$f(x) \leq g(x).$$

Alors

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.

(ii) $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 16. *Déterminer* $\lim_{x \to +\infty} \cos(x) - x^2$.

Solution.

1.7 Limites des fonctions monotones

Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $]a, b[$.

Théorème 1.28 : *Théorème de la limite monotone pour une fonction croissante*

Si f est croissante alors $\lim_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existent. De plus,

(i) Si f est minorée, alors $\lim_{x \to a^+} f(x)$ est finie et

$$f(x) \geq \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Si f n'est pas minorée, alors $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

(ii) Si f est majorée, alors $\lim_{x \to b^-} f(x)$ est finie et

$$f(x) \leq \lim_{x \to b^-} f(x).$$

Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

Théorème 1.29 : *Théorème de la limite monotone pour une fonction décroissante*

Si f est décroissante alors $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existent. De plus,

(i) Si f est majorée, alors $\lim_{x\to a^+} f(x)$ est finie et

$$f(x) \leq \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

(ii) Si f est minorée, alors $\lim_{x\to b^-} f(x)$ est finie et

$$f(x) \geq \lim_{x\to b^-} f(x).$$

Si f n'est pas minorée, alors $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$.

Corollaire 1.30 : *Existence de limites à gauche et à droite pour une fonction monotone*

Soit f une fonction monotone sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$ (différent des bornes de I). Alors

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ et } \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ existent.}$$

De plus,

— Si f est croissante, alors
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

— Si f est décroissante, alors
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Exemple 17. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

Tracer la courbe représentative de f.

Solution.

Exemple 18. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x, & si\ x < 0, \\ 1, & si\ x = 0, \\ 2 + x^2, & si\ x > 0 \end{cases} \end{array}$$

Tracer la courbe représentative de f.

Solution.

1.8 Asymptotes

Définition 1.31 : *Asymptote verticale*

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0. Si la limite (à droite ou à gauche) de f en x_0 est infinie, alors on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.

Exemple 19. *L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Définition 1.32 : *Asymptote horizontale*

Soient f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $l \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

On peut alors lire sur un tableau de variations la position relative de la courbe par rapport à son asymptote horizontale.

Exemple 20. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

Déterminer les asymptotes de la courbe représentative de f.

Solution.

Définition 1.33 : *Asymptote oblique*

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

On observe qu'il suffit de montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$ pour montrer que la courbe représentative de f a une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = ax + b$.

Remarque 1.34 : *Asymptotes en $-\infty$*

On définit de façon analogue une asymptote horizontale ou oblique en $-\infty$.

Exemple 21. *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+1}$ possède une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$ et déterminer la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote.*

Solution.

2 Continuité d'une fonction réelle

2.1 Définitions

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 2.1 : *Continuité en un point*

Soit $x_0 \in I$. On dit que f **est continue en** x_0 si f possède une limite finie en x_0 et que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si f n'est pas continue en x_0, on dit qu'elle est discontinue en x_0.

Exemple 22. *Soit f une fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \leq 0, \\ x+1, & si\ x > 0. \end{cases}$$

Tracer la fonction f au voisinage de 0.

Solution.

Définition 2.2 : *Continuité à droite en un point*

Soit $x_0 \in I$. On dit que f **est continue à droite en** x_0 si f possède une limite finie à droite en x_0 et que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Définition 2.3 : *Continuité à gauche en un point*

Soit $x_0 \in I$. On dit que f **est continue à gauche en** x_0 si f possède une limite finie à gauche en x_0 et que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 23. *Reprenons la fonction de l'exemple précédent. Montrer que f est continue à gauche en 0 mais n'est pas continue à droite en 0.*

Solution.

Exemple 24. *La fonction partie entière est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1.*

Théorème 2.4 : *Continuité en un point et continuité à gauche et à droite en un point*

Soit $x_0 \in I$.

$$f \text{ est continue en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est continue à gauche et à droite en } x_0.$$

Si x_0 est une borne de I, une seule des deux limites (à droite ou à gauche) existe.

Exemple 25. *Soit f une fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-2, & si\ x \leq 1, \\ e^{x-1}, & si\ x > 1. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en 1.

Solution.

2.2 Prolongement par continuité

Théorème 2.5 : *Prolongement par continuité*

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 sauf en x_0. Si f admet une limite finie l en x_0, alors on définit la fonction $\tilde{f}$ sur $D_f \cup \{x_0\}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in D_f, \\ l, & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est continue en x_0 et cette fonction est appelée **prolongement par continuité** de f en x_0.

Lorsqu'il est possible, le prolongement par continuité en un point est unique.

Exemple 26. *Déterminons le prolongement par continuité en* 0 *de la fonction* f *définie par*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1.$$

Ainsi comme $|x| > 0$,

$$\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \leq |x|.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On peut donc définir $\tilde{f}$ *le prolongement par continuité de* f *en* 0.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \textit{si } x \neq 0, \\ 0, & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ *est une fonction définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

Remarque 2.6 : *Interprétation*

On rajoute (si cela est possible) une valeur supplémentaire à la fonction f en un point où elle n'était pas définie initialement et en préservant la continuité de la fonction f.

Pour alléger les notations, la fonction $\tilde{f}$ est souvent encore notée f.

2.3 Continuité sur un intervalle

Définition 2.7 : *Continuité sur un intervalle*

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I. L'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I est noté $C(I)$ ou $C^0(I)$.

Si I est de la forme $[a,b[$, $]a,b]$ ou $[a,b]$, alors f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point de $]a,b[$ et continue à droite en a si I contient a, et à gauche en b si I contient b.

Exemple 27. *Une fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$ si elle est continue en tout point $x_0 > 0$ et continue à droite en* 0.

Théorème 2.8 : *Continuité des fonctions usuelles*

Les fonctions polynomiales, fractions rationnelles, puissances, valeur absolue, logarithme, exponentielle et fonctions trigonométriques sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemple 28. $x \mapsto x^5 + 3x^2 - 8$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x - 1}$ *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ $\quad x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$

$x \mapsto |x|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \ln(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$ $\quad x \mapsto e^x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$

$x \mapsto \cos(x)$ *et* $x \mapsto \sin(x)$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \tan(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Remarque 2.9 : *Partie entière*

La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais l'est sur tout intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Elle est aussi continue à droite sur $\mathbb{R}$.

2.4 Opérations sur les fonctions continues

Propriété 2.10 : *Opérations sur les fonctions continues*

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors $f + g$ et fg sont continues sur I.
Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est aussi continue sur I.

Propriété 2.11 : *Composée de fonctions continues*

Si f est continue sur I à valeurs dans J et si g est continue sur J, alors $g \circ f$ est aussi continue sur I.

Pour démontrer qu'une fonction est continue, il suffit donc généralement de dire qu'elle s'obtient à partir de fonctions usuelles et de ces différentes opérations.

Exemple 29. *On définit la fonction f par*

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{(\cos(x))^2 + 1}.$$

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition et quotient de fonctions usuelles (logarithme, cosinus, polynomiale) toutes continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et avec un dénominateur qui ne s'annule jamais.

3 Applications de la notion de continuité

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

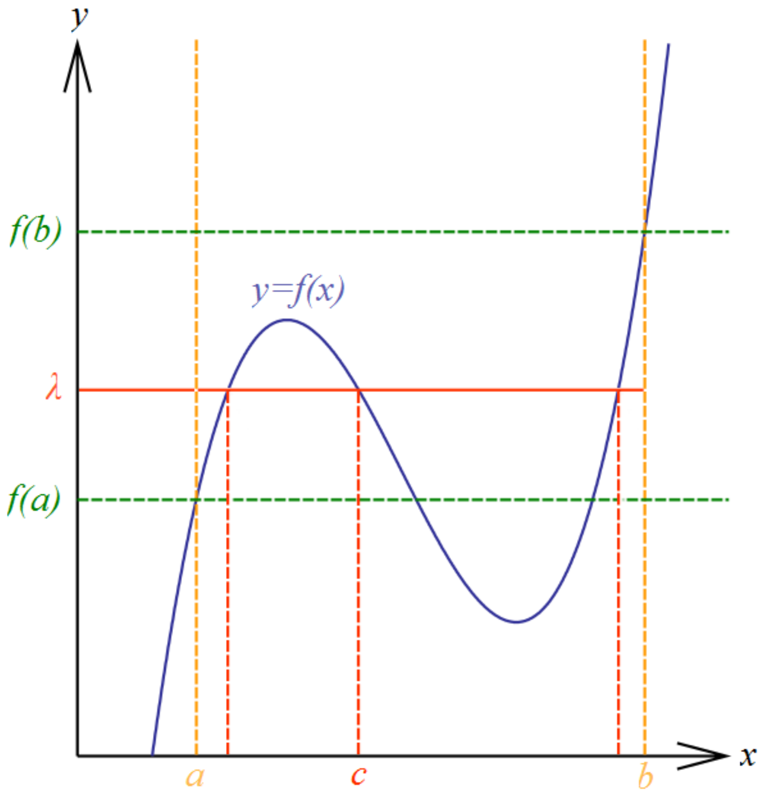
Théorème 3.1 : *Théorème des valeurs intermédiaires*

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 3.2 : *TVI, version équivalente*

Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Le réel c n'est pas nécessairement unique.



Démonstration. Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Si $f(a) = f(b)$, le résultat est immédiat puisqu'il suffit de prendre $c = a$ ou $c = b$. Supposons que $f(a) < f(b)$ (le cas $f(a) > f(b)$ se traite de manière analogue).

On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis pour $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > \lambda$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n \qquad \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq \lambda$$

On montre sans difficulté par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Ainsi $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente vers 0. On en conclut donc que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée c. Par récurrence, on montre également que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$$

Ainsi par continuité de f sur $[a,b]$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$ et $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$. D'après le théorème d'encadrement, $\lambda = f(c)$.

□

La fonction f peut aussi prendre des valeurs qui ne sont pas comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple 30. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : [-1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

On remarque que $f([-1,2]) = [0,4]$ *et pourtant* $f(-1) = 1$ *et* $f(2) = 4$.

Si la fonction n'est pas continue, elle ne prend pas forcément toutes les valeurs intermédiaires car elle peut faire un "saut".

Exemple 31. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

f *n'est pas continue sur* $\mathbb{R}$. *On a*

$$\lfloor 1 \rfloor = 1 \text{ et } \lfloor 2 \rfloor = 2 \text{ mais } \lfloor x \rfloor = 1.5 \text{ n'a pas de solution.}$$

On constate aussi que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ *qui n'est plus un intervalle.*

Corollaire 3.3 : *Fonction continue changeant de signe*

Toute fonction continue qui change de signe sur un intervalle s'annule au moins une fois sur cet intervalle.

Exemple 32. *Montrer que l'équation* $x^5 + 3x^3 - 2 = 0$ *a au moins une solution dans l'intervalle* $[0,1]$.

Solution.

3.2 Algorithme de dichotomie

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires 3.2, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$. On reprend les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires : $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ll} a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > \lambda \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leq \lambda \end{array}$$

On rappelle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers c et que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq c \leq b_n$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, l'algorithme de dichotomie cherche à déterminer un rang n_0 à partir duquel pour $n \geq n_0$

$$b_n - a_n \leq \varepsilon$$

Ceci permet alors d'avoir une approximation de c à ε près avec a_{n_0} (ou b_{n_0}) car

$$0 \leq c - a_{n_0} \leq b_{n_0} - a_{n_0} \leq \varepsilon.$$

Informatique 3.4 : *Python : algorithme de dichotomie*

On va définir la fonction Python suivante prenant en entrée f (définie préalablement), a, b et ε.

```
def dichotomie(f,a,b,eps):
   while b-a>eps:
      t=(a+b)/2
      if f(a)*f(t)<0 : # f change de signe entre a et t
         b=t # alors f s'annule entre a et t
      else :
         a=t # alors f s'annule entre t et b
   return b
```

La fonction renvoie une approximation d'un point en lequel f s'annule à ε près.

Exemple 33. *On va déterminer une approximation à* 10^{-3} *près d'une solution de* $x^5+3x^3-2=0$ *sur* $[0,1]$. *On utilise la fonction dichotomie faite précédemment.*

```
import numpy as np
def f(x):
   return x**5+3*x**3-2
print(dichotomie(f,0,1,0.001))
```

Python renvoie la valeur 0.8173828125.

3.3 Théorème des bornes

Définition 3.5 : *Segment*

On appelle **segment** tout intervalle de $\mathbb{R}$ fermé et borné (i.e. tout intervalle $[a,b]$ avec a et b deux réels).

Théorème 3.6 : *Théorème des bornes*

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Théorème 3.7 : *Théorème des bornes, version équivalente*

Si une fonction f est continue sur $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes.
Autrement dit, si on note $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, alors

$$f([a,b])=[m,M].$$

Démonstration. Admis □

Exemple 34. *Si* $f(x)=\sin(x)$ *alors* $f([0,\pi])=[0,1]$.

Si on ne prend pas un segment, l'ensemble image n'est plus forcément un segment.

Exemple 35. *Si* $f(x)=\dfrac{1}{x}$, *alors* f *est continue sur* $]0,1]$ *mais* $f(]0,1])=[1,+\infty[$.

3.4 Théorème de la bijection monotone

Définition 3.8 : *Rappel : fonction réelle bijective*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction. On dit que f est une bijection de I sur J lorsque pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x.

Théorème 3.9 : *Théorème de la bijection monotone*

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

L'hypothèse de stricte monotonie permet donc d'assurer l'unicité de l'antécédent dans le théorème des valeurs intermédiaires.

Démonstration. On limitera notre démonstration au cas du segment. Notons $I = [a, b]$ et J l'ensemble des réels compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
La monotonie de la fonction implique que l'image de l'intervalle $[a, b]$ est contenue dans J :

- si f est croissante, pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$,
- si f est décroissante, pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$.

Le fait que cette monotonie soit stricte assure que deux réels distincts ne peuvent avoir la même image, autrement dit la fonction est injective sur $[a, b]$.
Enfin, le théorème des valeurs intermédiaires (qui s'appuie sur l'hypothèse de continuité) garantit que tout élément de J admet au moins un antécédent par f, c'est-à-dire que la fonction est surjective dans J. □

Exemple 36. *Montrer que l'équation* $x^3 + 2x - 1 = 0$ *possède exactement une solution dans* $[0, 1]$.

Solution.
Toutes les bijections ne sont pas nécessairement continues et strictement monotones.

Exemple 37. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x, & si\ x \in [-1, 0[, \\ 1 - x, & si\ x \in [0, 1]. \end{cases} \end{array}$$

Vérifier que f *réalise une bijection de* $[-1, 1]$ *dans* $[-1, 1]$

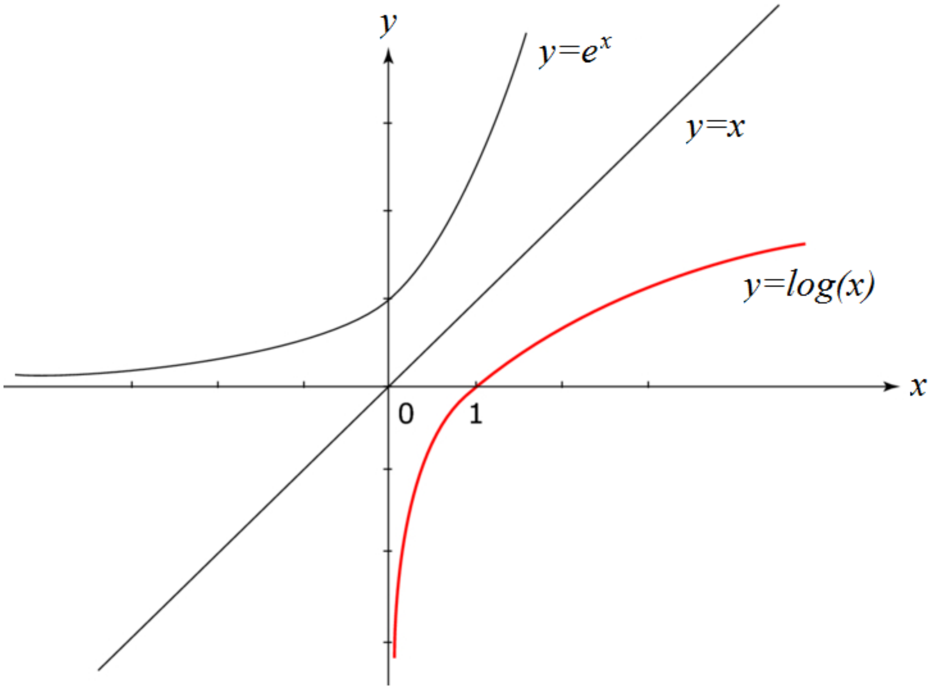
Solution.

Théorème 3.10 : *Bijection réciproque*

Si f est continue et bijective de l'intervalle I dans l'intervalle J, alors sa bijection réciproque f^{-1} est une bijection de J dans I, elle est continue sur J et a le même sens de variation que f.

Les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} (dans un repère orthonormé) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 38. *Le fonction* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *est continue et strictement croissante. Elle est bijective et sa bijection réciproque est la fonction* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *qui est aussi continue et strictement croissante.*



3.5 Suites récurrentes

Proposition 3.11 : *Continuité et suites*

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et si f est continue en l, alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l).$$

Démonstration. Comme f est continue en l,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que } |x-l| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(l)| \leq \varepsilon.$$

En utilisant la convergence de la suite, pour $\eta > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \eta.$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |f(u_n) - f(l)| \leq \varepsilon.$$

□

Définition 3.12 : *Suite récurrente*

On appelle **suite récurrente** (d'ordre 1) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ donné et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Définition 3.13 : *Point fixe d'une fonction*

Soit f une fonction définie sur D_f. On appelle **point fixe** de f tout réel $x \in D_f$ vérifiant

$$x = f(x).$$

Proposition 3.14 : *Limite d'une suite récurrente (proposition hors programme)*

Soit f une fonction définie sur D_f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de D_f définie par

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et si f est continue en l, alors l est un point fixe de f. On a donc :

$$l = f(l).$$

Démonstration. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Comme f est continue en l, d'après la proposition 3.11,

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l).$$

Par unicité de la limite, $l = f(l)$. □

Remarque 3.15 : *Limites finies possibles d'une suite récurrente*

Si la fonction f est continue sur l'intervalle considéré, alors les limites finies <u>possibles</u> de la suite (u_n) sont données par les points fixes de f.

Méthode 3.16 : *Étude des suites récurrentes*

La combinaison des deux propriétés précédentes est très puissante : une des grandes méthodes d'étude des suites récurrentes suit le plan suivant :

1. (a) On étudie les variations de f.
   (b) On détermine les points fixes de f :
   - soit en résolvant l'équation $f(x) = x$.
   - soit en utilisant le théorème de la bijection monotone à $x \mapsto f(x) - x$ (dans ce cas on ne disposera pas d'une expression explicite pour les éventuels points fixes).
2. On trouve un intervalle contenant tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On détermine la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On détermine si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge :
   (a) si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on en déduit par le théorème de la limite monotone que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l. Par unicité de la limite, on en déduit que $f(l) = l$.
   (b) Sinon on montre par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend alors vers $+\infty$ si elle est croissante (resp. $-\infty$ si elle est décroissante).

Exemple 39. *Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation*

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. Étudier f et faire un tableau de variations de f.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x > 0$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement positive.
4. Pour quelle valeur de a, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante ?
5. On suppose $a > 1$.
   (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   (b) Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
6. On suppose $a < 1$.
   (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 1$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Solution.